Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Épreuve Finale.
Jeudi 17/05/2018 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (07pts) On donne le polynôme $P(x) = x^3 + 8$.

1. Factoriser, sur $\mathbb{R}$, le ploynôme P.
2. Décomposer ensuite en éléments simples la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{12}{P(x)}$.
3. Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^\lambda F(x)\, dx$ où λ est un paramètre réel positif.
4. En déduire la valeur de $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

Exercice 2: (07pts) On considère l'équation différentielle suivante :

$$(A) \qquad y'(x) = -2xy(x) - xy^2(x)$$

1. Déterminer la solution générale de (A) en la considérant comme une équation à variables séparables.
2. Déterminer ensuite la solution générale de (A) en la considérant comme une équation de Bernoulli.
3. Comparer les deux résultats.

Exercice 3: (06pts) On considère l'équation différentielle :

$$(B) \qquad y''(x) + 2y'(x) = 4$$

1. Déterminer la solution générale de (B) en faisant le changement de fonction $y'(x) = u(x)$.
2. Déterminer ensuite la solution générale de (B) en la considérant comme une équation d'ordre 2 linéaire à coéfficients constants et avec second membre.
3. Comparer les deux résultats.

1ère année M.I - Semestre 2 - 2017/2018.

Module : « Analyse II » - Epreuve Finale.

Corrigé.

Exercice 1 : (07 pts) $\quad P(x) = x^3 + 8$.

1°/ Factorisation de P : On remarque tout d'abord que $x = -2$ est une racine évidente ; $P(-2) = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$.
Donc $P(x) = (x+2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$. Pour déterminer le facteur du second degré, on peut soit faire une division euclidienne, soit procéder par identification. On trouve : $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 4$
c'est-à-dire : $\boxed{P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)}$ 1pt

Notons enfin que le facteur du second degré n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$ car $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$.

2°/ Décomposition de $F(x) = \dfrac{12}{P(x)}$: On a

$$F(x) = \frac{12}{x^3+8} = \frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (-2a+2b+c)x + 4a + 2c}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Par identification : $\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + 2b + c = 0 \\ 4a + 2c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ -4a + c = 0 \\ 4a + 2c = 12 \end{cases}$ 2pts

d'où $3c = 12 \Rightarrow \boxed{c = 4} \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = -1}$

d'où $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x-4}{x^2-2x+4}}$

3°/ Calcul de $I(\lambda)$: Pour le calcul de la primitive de $F(\cdot)$ on doit encore "arranger" sa présentation :

$$F(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{x-4}{x^2-2x+4} = \frac{1}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{3}{x^2-2x+4}$$

la forme canonique de x^2-2x+4 s'écrit :

$$x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 = 3\left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right] \quad (>0)$$

et donc

$$F(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{2x-2}{2(x^2-2x+4)} + \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

d'où

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda F(x)\,dx = \left[\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^\lambda$$

$$= \left[\ln(\lambda+2) - \frac{1}{2}\ln(\lambda^2-2\lambda+4) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda-1}{\sqrt{3}}\right)\right] -$$

$$- \left[\cancel{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{2}\ln 4} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\boxed{I(\lambda) = \ln\left(\frac{\lambda+2}{\sqrt{\lambda^2-2\lambda+4}}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda-1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

2,5 pts

4°/ Calcul de $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$: On a que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda+2}{\sqrt{\lambda^2-2\lambda+4}} = 1$

d'où $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

1,5 pt

On peut "se souvenir" que $\sin \pi/6 = 1/2$ et $\cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d'où

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}}$$

Exercice 2 : (07 pts) (A) $y'(x) = -2xy(x) - xy^2(x)$

1°/ Résolution en tant que : "eq. à variables séparables"

En effet $y'(x) = -x\left(2y(x) + y^2(x)\right) = -x\, y(x)\left(y(x)+2\right)$

On remarque aisément que $y_1(x) \equiv 0$ et $y_2(x) \equiv -2$ (fonctions constantes) sont deux solutions triviales. Cherchons alors $y(x) \not\equiv 0, -2$. 0,5

On a $$\frac{y'(x)}{y(x)\left(y(x)+2\right)} = -x \iff \frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{y'(x)}{y(x)+2} = -2x$$

d'où $\ln|y(x)| - \ln|y(x)+2| = -x^2 + \ln k_0$, $(k_0 > 0)$

$$\Rightarrow \left|\frac{y(x)}{y(x)+2}\right| = k_0 e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y(x)}{y(x)+2} = k_1 e^{-x^2}, \quad (k_1 = \pm k_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{2k_1 e^{-x^2}}{1 - k_1 e^{-x^2}}}$$ 2pts

Le calcul précédent a été mené avec la condition que $k_1 \neq 0$. Néanmoins, dans l'expression finale de $y(x)$, on peut prendre $k_1 = 0$ et retrouver la solution triviale $y_1(x)$. En définitive, l'ensemble des solutions est donné par

$$(*) \quad \boxed{y(x) = \frac{2k_1 e^{-x^2}}{1 - k_1 e^{-x^2}}, \ k_1 \in \mathbb{R} \text{ et } y_2(x) \equiv -2} \quad (k_1 = \infty)$$ 0,5

2°/ Résolution en tant que : "eq. de Bernoulli"

On a toujours la solution triviale $y_1(x) \equiv 0$. Cherchons $y(x) \not\equiv 0$ solution : On a : $$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -2x\frac{1}{y(x)} - x$$ 0,5

Posons $z(x) = 1/y(x)$, d'où $-z'(x) = -2xz(x) - x$

ou bien $$\boxed{z'(x) - 2xz(x) = x}$$

Appliquons (par exemple) la méthode du facteur intégrant qui est $\exp\left(\int -2x\,dx\right) = e^{-x^2}$.

$$e^{-x^2} z'(x) - 2x e^{-x^2} z(x) = x e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \left(e^{-x^2} z(x)\right)' = x e^{-x^2}$$ 2pts

$$\Rightarrow e^{-x^2} z(x) = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{z(x) = C e^{x^2} - 1/2}$$

et donc $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{C e^{x^2} - 1/2}}$ 0,5

Dans ce cas l'ensemble des solutions est donné par

(**) $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{C e^{x^2} - 1/2}, \; C \in \mathbb{R} \text{ et } y_1(x) \equiv 0}$ $(C = \infty)$.

3°/ <u>Comparaison des deux résultats</u> :

Il peut paraître que les solutions données aux (*) et (**) ne sont pas les mêmes. En fait c'est les même solutions écrites différemment. Prenons par exemple celles donnés par (*) : $y(x) = \dfrac{2k_1 e^{-x^2}}{1 - k_1 e^{-x^2}}$, divisons par $2k_1 e^{-x^2}$ $(k_1 \neq 0)$, alors $y(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2k_1} e^{x^2} - 1/2}$, il suffit de poser $C = \dfrac{1}{2k_1}$. On retrouve $y(x) = \dfrac{1}{C e^{x^2} - 1/2}$. 1pt

Aussi y_1 et y_2 sont échangées ($C = \infty \longleftrightarrow k_1 = 0$).
$C = 0 \longleftrightarrow k_1 = \infty$

Exercice 3 : (06 pts) (B) $y''(x) + 2y'(x) = 4$

1°/ Première Méthode : On pose $y'(x) = u(x)$, d'où (B) devient $u'(x) + 2u(x) = 4$ (eq. du 1er ordre linéaire avec second membre) 0,5

$$\Rightarrow e^{2x}u'(x) + 2e^{2x}u(x) = 4e^{2x}$$

$$\Rightarrow \left(e^{2x}u(x)\right)' = 4e^{2x}$$

$$\Rightarrow e^{2x}u(x) = \int 4e^{2x}dx = 2e^{2x} + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = 2 + C_1 e^{-2x} \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}}$$ 1pt

et donc $y'(x) = 2 + C_1 e^{-2x}$

et $\boxed{y(x) = 2x + C_2 - \frac{1}{2}C_1 e^{-2x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$ (*) 1pts

2°/ Deuxième Méthode :

a/ Résolution de l'E.S.S.M : $y_0''(x) + 2y_0'(x) = 0$

$r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r = 0$ ou $r = -2$, d'où

$$\boxed{y_0(x) = k_1 + k_2 e^{-2x}} \quad , k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$ 1pt

b/ Sol. particulière de l'E.A.S.M (Variation de la constante).

$$\begin{cases} k_1'(x) + k_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ k_1'(x).0 + k_2'(x)(-2e^{-2x}) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1'(x) + k_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ k_2'(x) = -2e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1'(x) = +2 \\ k_2'(x) = -2e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1(x) = 2x \\ k_2(x) = -e^{2x} \end{cases}$$

et donc $\boxed{y_p(x) = 2x - 1}$ 1pt.

c/ Sol. générale : $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$\boxed{y(x) = k_1 + k_2 e^{-2x} + 2x - 1} \quad (**)$$ 1pt

5

3°/ Comparaison des résultats :

Les solutions données par (*) et (**) sont exactement les mêmes, il suffit de poser :

$$\boxed{\begin{aligned} C_2 &= k_1 - 1 \\ C_1 &= -2k_2 \end{aligned}}$$

0,5