

Nom :

Prénom :

Date de Naissance :

Département de Mathématiques

15/05/2018

Faculté des Sciences

Corrigé de l'Epreuve Finale Algèbre 2

Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen

Durée : 1h-30'

EXERCICE 1 : (10 pts) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, on note :

$u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $u_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$ et $u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$.

Considérons $H = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$.

- 1- Déterminer l'ensemble des réels a, b, c tels que : $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$.
- 2- Déduire le rang du système $\{u_1, u_2, u_3\}$.
- 3- Montrer qu'un vecteur $u(x, y, z)$ écrit dans la base $\mathcal{B}$, appartient à H si et seulement si $x + y + z = 0$.
- 4- Déterminer $H \cap \text{vect}(e_1)$.
- 5- A-t-on $H + \text{vect}(e_1) = \mathbb{R}^3$? Déduire.

Solution : 1- $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ (E) avec :

$u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $u_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$ et $u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$.

D'où : $u_1(1, -2, 1)$, $u_2(2, -1, -1)$ et $u_3(1, 1, -2)$.

On résout le système, équivalent à (E) :
$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 & (E1) \\ -2a - b + c = 0 & (E2) \\ a - b - 2c = 0 & (E3) \end{cases} \quad 0.5 \text{ pt}$$

d'où :
$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 & (E1) \\ 3b + 3c = 0 & (E2 + 2E1) \\ -3b - 3c = 0 & (E3 - E1) \end{cases} \quad \text{soit } b = -c \text{ et donc } a = c \quad 2(0.25) \text{ pt}$$

En conclusion : l'ensemble cherché est $\{(c, -c, c) = c(1, -1, 1) ; c \text{ réel}\}$ 0.5pt

Remarque : On remarque donc que $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ d'où $\{u_1, u_2, u_3\}$ lié. 0.5pt

2- Le rang du système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est la dimension du sous espace engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3 . Puisque $H = \text{vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ alors :

$$\text{rang}\{u_1, u_2, u_3\} = \dim H. \quad 0.5 \text{ pt}$$

On remarque aisément que deux vecteurs quelconques des 3 vecteurs u_1, u_2 et u_3 ne sont pas colinéaires c'est à dire dépendants. 0.5pt

En conclusion : $\text{rang}\{u_1, u_2, u_3\} = \dim H = 2.$ 0.5pt

3- " $\Rightarrow$ " Si $u(x, y, z)$ est dans $H = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$ alors il existe des réels a, b et c tel que : $u = au_1 + bu_2 + cu_3$. 0.5pt Soit :

$$\begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = -2a - b + c \\ z = a - b - 2c \end{cases} \quad \underline{0.5pt}$$

D'où : $x + y + z = 0$,

qui découle de la somme des 3 équations du système précédent.

0.5pt

" $\Leftarrow$ " Soit $u(x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $x + y + z = 0$.

Montrons que u est dans H .

On a $(x, y, z) = (x, y, -x-y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$. 0.5pt On remarque que le vecteur $u(x, y, z)$ est bien dans le sous espace engendré par la famille libre

$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$. Montrons que ce sous espace n'est autre que H . 0.5pt

En effet ; H est le sous espace vectoriel dont une base est : $\{u_1, u_2\}$.

Or il existe a et b deux réels tel que $u_1 = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$: en effet

$$\begin{cases} 1 = a \\ -2 = b \\ 1 = -a - b \end{cases} \quad \underline{0.5pt}$$

Même chose : il existe a et b deux réels tel que $u_2 = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$: en effet

$$\begin{cases} 2 = a \\ -1 = b \\ -1 = -a - b \end{cases} \quad \underline{0.5pt}$$

Donc on remarque bien que le système $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ est une autre base de H .

0.5pt

D'où l'implication et donc l'équivalence.

4- $\text{vect}(e_1)$ est le sous espace engendré par e_1 . Donc tout vecteur $u(x, y, z)$ de $\text{vect}(e_1)$, s'écrit : $u = c e_1 = c(1, 0, 0)$ avec c réel.

Si u est à la fois dans H et dans $\text{vect}(e_1)$, donc dans leur intersection, alors,

$u = c(1, 0, 0) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$, 0.5pt d'où :

$$\begin{cases} c = a \\ 0 = b \\ 0 = -a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 0 = b \\ 0 = c \end{cases} \quad \text{Donc l'intersection se réduit au singleton } \{0\}. \quad \underline{0.5pt}$$

5- $H + \text{vect}(e_1)$ est un ensemble inclus dans $\mathbb{R}^3$ puisque la somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de $\text{vect}(e_1)$ est un vecteur à 3 composantes. 0.5pt

Inversement, soit $u(x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$. Existe-il v dans H et w dans $\text{vect}(e_1)$ / $u=v+w$??

En écrivant $v = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$ et $w = c(1, 0, 0)$, 0.5pt on aura $u=v+w$,

$$\begin{cases} x = a + c \\ y = b \\ z = -a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + c \\ y = b \\ z = -a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -z - y \\ b = y \\ c = x + y + z \end{cases} \quad \underline{0.5pt}. \quad \text{D'où : } H + \text{vect}(e_1) = \mathbb{R}^3.$$

EXERCICE2 : (6 points) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ tel que $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $\dim \ker(f) = 1$.

- 1- Déterminer $f(e_2)$ en fonction d'un paramètre a de $\mathbb{R}$.
- 2- Déterminer l'image d'un vecteur (x, y) en fonction de a .
- 3- Déterminer une base de $\ker(f)$.

Solution :

- 1- (2pts) f est une application linéaire. D'après le théorème du rang :
 $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker(f) = 2 - 1 = 1$. Donc $\operatorname{Im}(f)$ est engendrée par un seul vecteur qui formera la base de $\operatorname{Im}(f)$.
On sait que $\{f(e_1), f(e_2)\}$ engendre $\operatorname{Im}(f)$. Or $\dim \operatorname{Im}(f) = 1$, donc le système $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est lié. Alors il existe un réel a non nul tel que $f(e_2) = a f(e_1)$.
- 2- (2pts) L'image d'un vecteur (x, y) par f est un vecteur de $\operatorname{Im}(f)$, donc il s'écrira en fonction du vecteur de la base de $\operatorname{Im}(f)$, qui est constituée d'un seul vecteur, puisque $\dim \operatorname{Im}(f) = 1$. Prenons $\{f(e_1)\}$ une base de $\operatorname{Im}(f)$, donc tout vecteur image de (x, y) sera de la forme : $af(e_1) = a(e_1 + e_2) = a(1, 1)$ où a est réel.
- 3- (2pts) On a trouvé que $f(e_2) = a f(e_1)$ et comme f est linéaire alors $f(e_2 - a e_1) = 0$ donc $e_2 - a e_1$ est dans $\ker(f)$. Il est non nul, donc $\{e_2 - a e_1\}$ est une base de $\ker(f)$ qui bien une droite vectorielle engendrée par $e_2 - a e_1 = (-a, 1)$.

EXERCICE3 : (4 points) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on appelle plan tout sous espace vectoriel de dimension 2.

- 1- Soit H un plan de $\mathbb{R}^3$, et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à H .
Montrer que $H \oplus \operatorname{Vect}(u) = \mathbb{R}^3$.
- 2- Soient H_1 et H_2 deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $H_1 + H_2 = \mathbb{R}^3$.
- 3- Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.
- 4- Quel résultat de la géométrie classique (de la classe de terminal) retrouve-t-on ?

Solution : 1- (1pt) Soit v un vecteur qui est à la fois dans H et dans $\operatorname{Vect}(u)$, donc dans leur intersection. Alors v s'écrit forcément sous la forme : $v = a u$ où a est réel. Comme H est un sous espace vectoriel, alors en prenant a non nul, $(1/a)v$ appartient à H . Or $(1/a)v = u$ mais le vecteur u n'appartient pas à H par hypothèse, donc a doit être nul. Ce qui donne $v = 0$.

Maintenant u étant non nul alors $\dim \operatorname{Vect}(u) = 1$.

On a $\dim H + \dim \operatorname{Vect}(u) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

D'où : $H \oplus \operatorname{Vect}(u) = \mathbb{R}^3$.

2- (1pt) H_1 et H_2 sont distincts c'est-à-dire ne sont pas confondus. Ils ne peuvent pas être parallèles puisqu'ils sont deux sous espaces vectoriels et leur intersection ne peut pas être vide. En effet, ils contiennent au moins le vecteur nul comme vecteur commun. Ces deux sous espaces sont donc sécants.

Si on prend un vecteur w dans H_1 mais pas dans H_2 , alors selon la question précédente on a $H_2 \oplus \text{vect}(w) = \mathbb{R}^3$. Comme $\text{vect}(w)$ est contenu dans H_1 , a lors forcément $H_2 + \text{vect}(w)$ est contenu dans $H_2 + H_1$.

Donc $\mathbb{R}^3$ est inclus dans $H_2 + H_1$.

$H_2 + H_1$ est évidemment inclus dans $\mathbb{R}^3$ d'où l'égalité.

3- (1pt) On sait que $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

Donc $\dim \mathbb{R}^3 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$,

d'où $\dim(H_1 \cap H_2) = (2+2)-3 = 4 - 3 = 1$.

4- (1pt) On retrouve un résultat classique de la géométrie dans l'espace vue en classe de terminale et qui dit que l'intersection de deux plans distincts est une droite ($\dim=1$).

FIN