Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr BELKAID

22/04/2018
Rattrapage Contrôle continu Algèbre2
Durée : 1h-30'

CORRIGE

EXERCICE 1 : (7 Pts) Soit $(G, .)$ un groupe tel que : pour x, y dans G on a :
$sym(x . y)=sym(x) . y$ et $sym(y . x)=sym(y) . x$ Montrer que $sym(x . x) = y . y$.
$Sym(x)$ étant le symétrique de x dans $(G,.)$.

Solution : On a par hypothèse $sym(x.y)=sym(x).y$
Or $sym(x.y)=sym(y).sym(x)$, donc $sym(y).sym(x) = sym(x).y$, 1pt d'où
$y.sym(y).sym(x) = y.sym(x).y$ ce qui implique $sym(x) = y. sym(x). y$. 1pt
Montrons que $(x.x).(y.y) = e$ et $(y.y).(x.x) = e$. 2 (0.5)pt
On a $sym(x.x) = sym(x).x = y.sym(x).y.x$, ce qui donne
$x.x = sym[(y.sym(x)).(y.x)] = sym(y.sym(x)).y.x = sym(y).sym(x).y.x$. 1pt

De même $y.y = sym(x).sym(y).x.y$ 1pt

D'où $(x.x).(y.y) = e$ et $(y.y).(x.x) = e$. 2(1) pts

En conclusion : $sym(x.x) = y.y$

Remarque : Cette manière de faire n'est pas unique.

EXERCICE 2 : (5 Pts) Résoudre dans $\mathbb{R}[x]$ l'équation :

$$(x^3 + 1)P'(x) = x\,(P(x^2) + y).$$

$P'(x)$ est la dérivée de $P(x)$, et y est une constante réelle.

Solution : Soit $d^\circ P = n$ 0.5pt
On a $(x^3 + 1)P'(x) = x\,(P(x^2) + y)$ (E)
D'où $3 + (n-1) = 1 + 2n$, soit $n=1$. 0.5pt
Prenons donc $P(x) = ax+b$ d'où $P'(x)=a$. 2(0.5) pt. En remplaçant dans (E) et par identification des coefficients 1pt on trouvera : $a=0$ et $b= -y$. 2(0.5)pt
En conclusion $P(x) = -y$ est solution de (E) avec y un réel. 1pt.

EXERCICE 3 : (8 Pts) On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$, $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

1- $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe abélien ?

2- Montrer que l'application $f:\ x \mapsto x^3$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

3- Déterminer le noyau et l'image de f. f est-il bijectif? Justifier

---

Solution :

1) Commutativité : on vérifie aisément que $x*y = y*x$ 1pt

Associativité : on vérifie aisément que $x*(y*z) = (x*y)*z$ 1pt

Elément neutre : on vérifie aisément que $e=0$ vérifie $e*x=x$. 1pt

Elément symétrique : de même, $sym(x) = -x$, vérifie $sym(x)*x=0$ 1pt

Donc $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

2) f est un morphisme de groupes. En effet : pour tout x, y réels :

$f(x*y) = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$ 1pt

3) $Ker(f) = \{x$ réels tel que $f(x)=0\} = \{0\}$ 2(0.5)pt

$Im(f) = \{y$ réels tel que $y = f(x)$, x réel$\}$. 0.5pt

$y = f(x)$ implique que $x =$ racine cubique de (y). Donc pour tout y réel il existe x qui vaut racine cubique de y tel que $y = f(x)$. Donc $Im(f) = \mathbb{R}$. 0.5pt

$Ker(f) = \{0\}$ bi-implique f injectif 0.5pt

$Im(f) = \mathbb{R}$ bi-implique f surjectif. 0.5pt

En conclusion f est bijectif.