Nom : ----------

Prénom : ----------

Date de Naissance : ----------

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen

22/03/2018
Contrôle continu Algèbre2
Durée : 1h-30'

EXERCICE 1 (6 Pts) Soit D un polynôme du troisième degré dans $\mathbb{R}[x]$ dont le coefficient dominant vaut 2, et, qui vérifie : D(-1)=D(0)=D'(0)=0. Déduire avec justification $D(x)$ puis déterminer le reste de la division euclidienne de $(x-1)^{3n} - x^{2n} + 1$ par $D(-x)$.

On remarque que 0 est solution double de $D(x)=0$ 0.5

et que -1 est solution simple de $D(x)=0$, 0.5

et puisque 2 est le coefficient dominant du polynôme D de degré 3, alors on déduit que :

$$D(x) = 2x^2(x+1). \quad 0.5$$

$$D(-x) = 2x^2(-x+1). \quad 0.5$$

Les solutions de D(-x)=0 sont donc 0 et 1.

Remarque : Il a fallu (je pense) préciser dans l'énoncé que n est non nul !!

Posons: $P(x) = (x-1)^{3n} - x^{2n} + 1$, d'où $P'(x) = 3n(x-1)^{3n-1} - 2nx^{2n-1}$. (2 * 0.5)

Soit $Q(x)$ et $R(x)$ le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par D(-x).

On a : $P(x) = D(-x)Q(x) + R(x)$ avec $d^\circ R < 3$. (2 * 0.5)

On pose : $R(x) = ax^2 + bx + c$, d'où $R'(x) = 2ax + b$. (2 * 0.5)

On a : $P(0) = R(0)$, $P'(0) = R'(0)$ et $P(1) = R(1)$.

Soit : $(-1)^{3n} + 1 = (-1)^n + 1 = c$, 0.5

$3n(-1)^{3n-1} = -3n(-1)^n = b$ 0.5

et $0 = a + b + c$,

soit $-b - c = 3n(-1)^n - (-1)^n - 1 = a$ 0.5

En conclusion : $R(x) = (3n(-1)^n - (-1)^n - 1)x^2 - 3n(-1)^n x + (-1)^n + 1$ 0.5

EXERCICE 2 : (4 Pts) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tel que $(x^2+1)P(x) = P(x^2)$.

Soit P un polynôme d'ordre n.

On a : $P(x) = a_n x^n + Q(x)$ avec $a_n \neq 0$ et $d^\circ Q < n$ 0.5 +0.5

d'où $P(x^2) = a_n x^{2n} + Q(x^2)$. 0.5

****

****

****
****
****
****
****
****

$(x^2+1)P(x)=P(x^2)$ nous donne donc:

$a_n x^{n+2}-a_n x^{2n}+a_n x^n+Q(x)(x^2+1)-Q(x^2)=0.$ (E) 0.5

Le degré de $a_n x^{n+2}-a_n x^{2n}+a_n x^n+Q(x)(x^2+1)-Q(x^2)$ est soit 2n, soit n+2.

2n < n+2 ssi n < 2.

- Si $n=0$ alors le polynôme constant non nul n'est pas solution de $(x^2+1)P(x)=P(x^2)$. 0.5
- Si $n=1$ alors $P=ax+b$ et (E) devient :

$ax^3-ax^2+ax+bx^2=0$, soit a = b =0 et donc le polynôme nul est seul solution de $(x^2+1)P(x)=P(x^2)$. 0.5

- Si $n\geq 2$. On se contentera que de n=2 seulement puisque $(x^2+1)P(x)$ et $P(x^2)$ auront même degré 4. Pour n>2 on obtiendra les mêmes solutions que pour n=2.

Dans ce cas on pose :

$P(x)=ax^2+bx+c$, (a non nul) d'où $P(x^2)=ax^4+bx^2+c$. 0.5

(E) nous donne donc : $bx^3+(c+a-b)x^2+b=0$. On déduit que $b=0$ et $c=-a$.

D'où les polynômes P solutions de $(x^2+1)P(x)=P(x^2)$ sont $P(x)=a(x^2-1)$, 0.5 avec a réel non nul (si a =0 on retombe sur les polynômes nuls).

<u>EXERCICE 3 (10 Pts)</u> Soit (E, T) un groupe et soit k un élément de E.

On définit dans le même ensemble E une autre loi * par : pour x, y de E, x * y=x T k T y

1- Montrer que (E, *) est un groupe. (<u>Notez par sym(x) le symétrique de x dans (E, *)</u>).

2- Soit L un sous groupe de (E,T) et K={ s(k) T x / x élément de L}. <u>[s(k) est le symétrique de k dans (E,T)]</u>. Montrer que K est un sous groupe de (E,*).

3- On définit une application f de (E,T) dans (E,*) par : f(x)=x T s(k).

a- Montrer que f est un morphisme de groupes.

b- Déterminer le noyau de f.

c- Déterminer l'image de f.

d- f est-il un isomorphisme ? Justifier.

e- Déterminer f(s(sym(k))) sans passer directement par l'expression de f.

f- A-t-on f(L) = K ? Justifier.

1- <u>(E,*) un groupe.</u>

- * est une loi interne : en effet ; T est interne donc x*y=x T k T y est dans E. 0.5
- * est associative : en effet ; soient x, y et z dans E.

(x*y)*z = (xTkTy)TkTz = xTkT(yTkTz) = x*(y*z) (T associative) 0.5

- * admet un élément neutre e : en effet , soit x dans E

A droite : x*e=x ssi xTkTe = x ssi s(x)TxTkTe=s(x)Tx ssi eeTkTe=ee
ssi e=s(k) 0.5

A gauche : e*x = s(k)TkTx = eeTx = x (ee neutre pour T) 0.5

- Chaque élément x de E admet un symétrique sym(x) dans E:en effet, soit x dans E

A droite : x*sym(x)=e ssi xTkTsym(x)=e ssi s(x)TxTkTsym(x)=s(x)Te ssi
kTsym(x) = s(x)Ts(k) ssi s(k)TkT sym(x) = s(k) T s(x)Ts(k) ssi
sym(x) = s(k) T s(x)Ts(k). 0.5

A gauche: sym(x)*x= s(k) T s(x)Ts(k)TkTx = s(k)Ts(x)TeeTx
=s(k)Ts(x)Tx=s(k)=e 0.5

2- Soit L un sous groupe de (E,T) et K={ s(k) T x / x élément de L}.
K est un sous groupe de (E,*)

- K est non vide : en effet : ee est dans L donc s(k)Tee = s(k) =e est dans K. 0.5
- Soient x, y dans K. Montrons que x*sym(y) est dans K :

X, y dans K implique qu'il existe x1, y1 dans L tel que x=s(k)Tx1 et y = s(k)Ty1..

X*sym(y) = x TkTsym(y) = xTkTs(k)Ts(y)Ts(k)
= s(k)Tx1TkTs(k)Ts(s(k)Ty1)Ts(k)
= s(k)Tx1Ts(y1)TkTs(k)
= s(k)Tx1Ts(y1). 0.5

Or L est un sous groupe de (E,T) donc x1Ts(y1) est dans L. 0.5
Donc x*sym(y) est dans K

3- Soit f de (E,T) dans (E,*) tel que f(x)=x T s(k).

a- Montrons que f est un morphisme de groupes.

f(x)*f(y) = f(x)TkTf(y) = x T s(k) T k T y T s(k)=x T y Ts(k) = f(xTy). 0.5

b- Ker(f)= { x dans E (départ) tel que f(x) = e}. 0.5

f(x)=e ssi xTs(k) = e ssi xTe = e ssi x = ee donc Ker(f)={ee}. 0.5

c- Im(f)={y dans E (arrivée) tel que y=f(x) ; x dans E} 0.5

$y=f(x)$ ssi $y = x \top s(k)$ ssi $x = y \top k$ Donc pour tout y dans E (arrivée), il existe x dans E (départ) qui vérifie $x = y \top k$ donc $\mathrm{Im}(f)=E$ 0.5

d- De b) on déduit que f est injectif et de c) on déduit que f est surjectif. 0.5+0.5
f est donc un isomorphisme.

e- Déterminons $f(s(\mathrm{sym}(k)))$.

Puisque f est un morphisme alors $f(s(\mathrm{sym}(k))) = \mathrm{sym}(f(\mathrm{sym}(k)))$ 0.5

$$= \mathrm{sym}(\mathrm{sym}(k) \top s(k))$$
$$= \mathrm{sym}(s(k) \top s(k) \top s(k) \top s(k))$$
$$= \mathrm{sym}\,(e \top e \top e \top e)$$ 0.5

f- A-t-on $f(L) = K$?

Soit x dans L, alors $f(x) = x \top s(k)$.

Or les éléments de K sont de la forme $s(k) \top x$. 0.5

Si $\top$ est commutative alors $f(L) = K$ (la double inclusion), sinon on n'a pas égalité. 0.5