Série TD N° 02

CALCUL VECTORIEL - COORDONNEES

Exercice 1

$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant les vecteurs unitaires des axes rectangulaire Oxyz, on considère les vecteurs

$$\vec{r_1}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k} \qquad \vec{r_2}=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{r_3}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$$

1. Représenter graphiquement ces 3 vecteurs.
2. Calculer leurs modules.
3. Calculer les produits $\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}$ et $\vec{r_1}\wedge\vec{r_2}$, que représente ces deux produit ?

Exercice 2

Soit les trois vecteurs: $\vec{a}(1,2,2)$, $\vec{b}(2,2\sqrt{2},2)$ et $\vec{c}(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

1. Calculer les modules de ces vecteurs et en déduire leurs vecteurs unitaires
2. En considérant les angles θ_1 ,θ_2 et θ_3 compris entre 0 et π, calculer : cos θ_1= cos$(\vec{a},\vec{b})$ cos θ_2= cos$(\vec{b},\vec{c})$,cos θ_3= cos$(\vec{c},\vec{a})$.
3. Calculerles composantes des vecteurs $\vec{A}=\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{B}=\vec{b}\wedge\vec{c}$ et $\vec{C}=\vec{c}\wedge\vec{a}$.
4. En déduire sinθ_1, sin θ_2 et sin θ_3. Vérifierces résultats à l'aide de la question 2.

Exercice 3

On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points A(2, 0,0), B(2, −2, 0) et C(2, 3, −1).

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$
2. Calculer l'aire du triangle OAB.
3. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$, En déduire le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs
4. Déterminer un point D tel que $\overrightarrow{OD}$ soit orthogonal à la fois à $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 4

Soit les trois vecteurs: $\vec{a}(1,2,2)$, $\vec{b}(2,2\sqrt{2},2)$ et $\vec{c}(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

1- Calculer les modules de ces vecteurs et en déduire leurs vecteurs unitaires

2- En considérant les angles θ_1 ,θ_2 et θ_3 compris entre 0 et π, calculer : cos θ_1= cos$(\vec{a},\vec{b})$ cos θ_2= cos$(\vec{b},\vec{c})$,cos θ_3= cos$(\vec{c},\vec{a})$.

3- Calculerles composantes des vecteurs $\vec{A}=\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{B}=\vec{b}\wedge\vec{c}$ et $\vec{C}=\vec{c}\wedge\vec{a}$.

4- En déduire sinθ_1, sin θ_2 et sin θ_3. Vérifierces résultats à l'aide de la question 2.

Exercice 5

Soient les points M_1 (+1,+1,+1), M_2 (+2,+2,+1) et M_3 (+2,+1,0) ; calculer l'angle $\widehat{M_1M_2M_3}$

Déterminer l'équation du plan (p) passant par le point M_2 et perpendiculaire au vecteur $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

Exercice 6

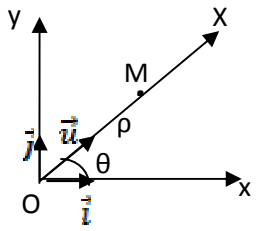
Soit un vecteur $\vec{U} = (t\vec{i} + 3\vec{j})/(\sqrt{t^2+9})$

1. Montrer que $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?
2. Calculer sa dérivée par rapport au temps ?

Exercice 7

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
2. Donner l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
3. Calculer $d\vec{u}/_{d\theta}$ que représente ce vecteur ?



B) Si la position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ωconstante).

Trouver l'expression du **vecteur vitesse** $\vec{v}$ en coordonnées polaires.

Exercice 8

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires (x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ)
2. Donner l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
3. Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires.
4. Donner l'expression du vecteur $\vec{A} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$ en coordonnées polaires.

Exercice 9

1. Trouver les relations reliant :
   - Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques.
   - Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques.
2. Trouver les vecteurs de déplacement élémentaires en coordonnées cylindriques et sphériques et déduire les vecteurs unitaires de ces deux dernières bases en fonction des vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3. Calculer la surface et le volume de la sphère et du cylindre.
4. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.