

Série TD N° 01**ANALYSE DIMENSIONNELLE****A. Rappel mathématique :****I. Les dérivées des fonctions usuelles**

Domaine de définition Df	Fonction f(x)	Domaine de dérivabilité Df'	Fonction dérivée f'(x)
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = a^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \ln a$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \log_a x $	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$[-1; 1]$	$f(x) = \arcsin x$	$] -1; 1[$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Opération	Dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^n	$nu' u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u' e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$

II. Les primitives des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Domaine de validité
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$] -1, 1[$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable.

Fonction	Primitive
$u' u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u' e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

B. Exercices

Exercice 1

Complétez le tableau suivant :

Grandeur physique	Symbole de la grandeur	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Surface				
Volume				
Masse volumique				
Fréquence				
Vitesse linéaire				
Vitesse angulaire				
Accélération linéaire				
Accélération angulaire				
Force				
Travail				
Energie				
Puissance				
Pression				

Exercice 2

1- L'équation caractéristique d'un fluide à température constante est de la forme suivante :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = c$$

Où p est la pression et V est le volume.

Déterminer les dimensions des grandeurs a , b et c .

2- Déterminer si les fonctions suivantes sont valides dimensionnellement :

- $p = \rho g h_1 + h_2 F$ tels que : P : une pression, g : l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 : hauteurs et F : une force
- $\theta = \frac{d \sin(\alpha)}{l \cos(\beta)}$ tels que : d et l ont une dimension d'une longueur.

Exercice 3

La quantité de mouvement P ($P = Mv$ avec v est une vitesse) associée à un photon dépend de sa fréquence f selon l'expression suivante : $P = \sigma f^\beta c^\gamma$

Où c est une vitesse de la lumière.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les exposants α , β et γ .

Exercice 4

Des expériences ont montré que la vitesse v du son dans un gaz n'est fonction que de la masse volumique ρ et du coefficient de compressibilité χ .

Quelle est la loi qui donne la vitesse v en fonction des caractéristiques du gaz, on rappelle que χ est homogène à l'inverse d'une pression.

Exercice 5

Dans un fluide, une bille de rayon r animée d'une vitesse v , est soumise à une force de frottement donnée par $F = 6\pi\eta r v$, où η est la viscosité du fluide.

1- Quelle est la dimension de η ?

2- Lorsque la bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, sa vitesse s'écrit:

$$v = a \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$$

Où a et b sont deux grandeurs qui dépendent des caractéristiques du fluide.

Quelles sont les dimensions de a et b ?

Exercice 6

La distance focale f d'une lentille est déterminée à partir de la formule :

$$f = \frac{D^2 - a^2}{4D}$$

Quelle est la dimension de f , D et a .

Calculer l'incertitude absolue Δf en fonction de ΔD et Δa .

Exercice 7

L'expression d'une grandeur physique G est :

$$G = \frac{T^2 g a}{4\pi^2} - a^2$$

T représente le temps, a est une longueur et g est l'accélération de la pesanteur.

- 1- Déterminer la dimension de G et déduire son unité.
- 2- Calculer l'incertitude absolue ΔG en fonction de ΔT et Δa .

Exercice 8

La hauteur H d'un liquide de masse M contenu dans un cylindre de rayon R est donnée par la relation :

$$H = \frac{(2 \cdot \sigma \cdot \cos \alpha)}{(R \cdot g \cdot \rho)}$$

Où α est l'angle de contact liquide-cylindre, ρ la masse volumique du liquide et g l'accélération de pesanteur.

- 1- En utilisant les équations aux dimensions, trouver la dimension de σ .
- 2- Déterminer l'incertitude relative sur σ en fonction des incertitudes absolues ΔR , Δg , ΔM et $\Delta \alpha$.

Exercice supplémentaire

L'indice de réfraction n d'une substance, est donné par la relation:

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}$$

N étant l'indice du prisme et α un angle.

- 1- Calculer l'incertitude absolue Δn en considérant que $\Delta n = f(N, \alpha)$.
- 2- En déduire l'incertitude relative $\Delta n / n$.