Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1: Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition

$$f(x) = \max\left(x^2 - 1, x + 1\right) \quad , \quad g(x) = \begin{cases} (\sin x)\left(\sin \dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2: Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3-1}} \quad , \quad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad h(x) = x^x = e^{x \ln x}.$$

Exercice 3: Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé. Montrer que l'on a

$$2\,(x - \sin x) < (\tan x) - x$$

(Indication : appliquer le théorème des accroissement finis à la fonction $f(t) = 2\sin t + \tan t - 3t$ dans l'intervalle $[0, x]$).

Exercice 4: Par application de la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{2\ln(1+x) - 2x + x^2}{x^3}.$$

Exercice 5: Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction $g(x) = |f(x)|$.

1. Montrer que g est dérivable en tout point a où $f(a) \neq 0$.
2. Etudions à présent le cas où $f(a) = 0$. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que g admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite de a. Exprimer ces dérivées. A quelle condition y aura-t-il dérivabilité de g en a ?

Exercice 6: Pour tout entier $n \geq 1$ on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1$.

1. Montrer que f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1/2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (x_n) converge.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. En déduire la limite de (x_n).