Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1: Etudier puis représenter graphiquement la fonction $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Utiliser ce qui précède pour étudier et représenter graphiquement la fonction $f(x) = \tan(\pi\varphi(x))$.

Exercice 2: Simplifier au maximum les expressions des fonctions suivantes en précisant le domaine de validité des calculs :

$$f(x) = \coth(\ln x) \qquad , \qquad g(x) = \sin(\arctan x)\,.$$

(Indication : pour la deuxième, simplifier d'abord $\dfrac{g'}{g}$, puis passer à la primitive de part et d'autre.)

Exercice 3: Linéariser les expressions suivantes :

$$A(x) = \left(\cos^3 x\right)\left(\sin^2 x\right) \qquad , \qquad B(x) = \left(\cosh^2 x\right)\left(\sinh^3 x\right)\,.$$

Exercice 4: Etablir les formules suivantes en précisant leurs domaines de validité

$$\frac{\pi}{4} + \arctan x = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$2\arctan x = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \pi sign(x).$$

Indication : procéder par dérivation des deux membres de l'égalité.

Analyse 1 – Fiche de T.D n°5 (2017/2018)

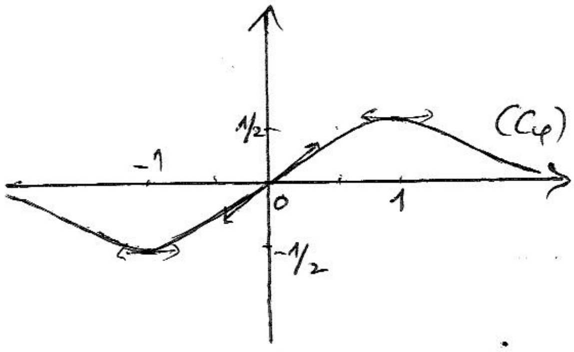
Quelques éléments de réponses.

EX1 : * $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}$, φ est impaire

$\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car fraction rationnelle)

$\varphi'(x) = \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $\quad$ 0 + 1 (0) −

x	0		1		$+\infty$
φ'	1	$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0



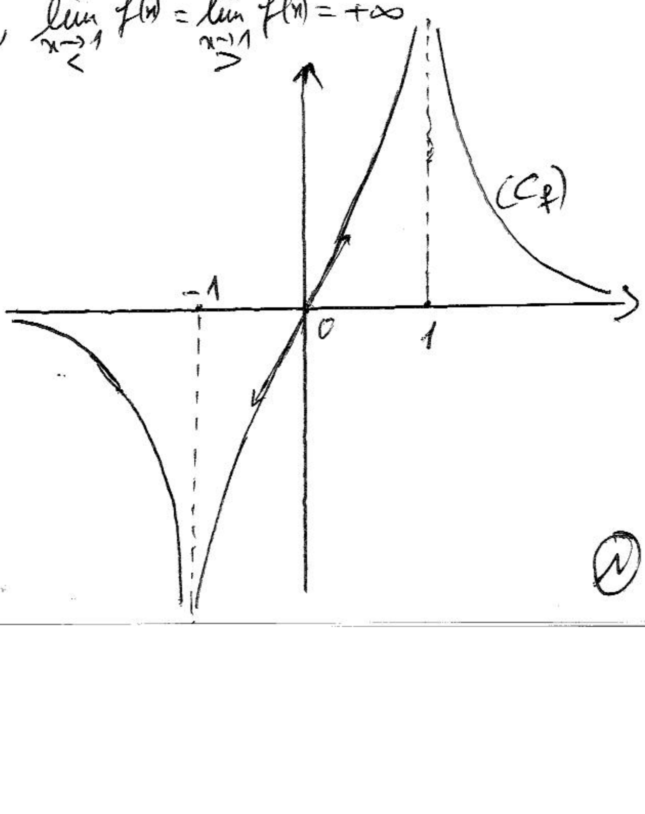
* $f(x) = tg(\varphi(x))$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \le \varphi(x) \le 1/2$ alors $-\pi/2 \le \pi\varphi(x) \le \pi/2$ et donc $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathcal{D}_\varphi \;/\; \varphi(x) \neq \pm 1/2\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. φ étant impaire et $tg(\cdot)$ aussi, alors f est impaire. On fera l'étude sur $I = [0, +\infty[\setminus \{1\}$

$f(0) = tg(\pi\varphi(0)) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^<} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^>} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \pi\, \varphi'(x) \left[1 + tg^2(\pi\varphi(x))\right]$

x	0		1		$+\infty$
f'	π	$+$	‖	$-$	
f	0	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	0



EX2: * $f(x) = \coth(\ln x) = \dfrac{ch(\ln x)}{sh(\ln x)}$, $\boxed{D_f =]0,+\infty[\setminus \{1\}}$

On a $ch(\ln x) = \frac{1}{2}\left[e^{\ln x} + e^{-\ln x}\right] = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2+1}{2x}$.

et $sh(\ln x) = \frac{1}{2}\left[e^{\ln x} - e^{-\ln x}\right] = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2-1}{2x}$

d'où $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ ($\forall x \in D_f$ seulement).

* $g(x) = \sin(\text{arctg}\, x)$, $\boxed{D_g = \mathbb{R}.}$

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\cos(\text{arctg}\, x)$, d'où $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{tg(\text{arctg}\, x)} = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$

Il est facile de voir que $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$

Maintenant on sait que $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \left(\ln|g(x)|\right)'$; $\dfrac{1}{x} = \left(\ln|x|\right)'$

et que $\dfrac{x}{1+x^2} = \left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)'$. D'où

$$\ln|g(x)| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C \text{, où } C \text{ est une constante} > 0$$

$$\Rightarrow |g(x)| = C\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow g(x) = \pm C\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

ou bien $g(x) = k\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, k constante réelle.

Pour déterminer k, on peut calculer les deux membres en $x=1$ par exemple : $g(1) = \sin(\text{arctg}\, 1) = \sin(\pi/4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

et $k\dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{k}{\sqrt{2}}$, donc $k = 1$

et $$\boxed{g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Ex3 : * $A(x) = (\cos^3 x)(\sin^2 x)$.

Posons $\omega = \cos x + i\sin x \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \cos x - i \sin x$.

$$(\cos x)^3 = \left[\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)\right]^3 = \frac{1}{8}\left[\omega^3 + 3\omega + \frac{3}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}\right]$$

$$(\sin x)^2 = \left[\frac{1}{2i}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left[\omega^2 - 2 + \frac{1}{\omega^2}\right]$$

Ainsi
$$A(x) = \frac{-1}{32}\left[\omega^3 + 3\omega + \frac{3}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}\right]\left[\omega^2 - 2 + \frac{1}{\omega^2}\right]$$

$$= \frac{-1}{32}\left[\omega^5 - 2\omega^3 + \omega + 3\omega^3 - 6\omega + \frac{3}{\omega} + 3\omega - \frac{6}{\omega} + \frac{3}{\omega^3} + \frac{1}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^5}\right]$$

$$= \frac{-1}{32}\left[\left(\omega^5 + \frac{1}{\omega^5}\right) + \left(\omega^3 + \frac{1}{\omega^3}\right) - 2\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{32}\left[2\cos 5x + 2\cos 3x - 2\cos x\right]$$

$$\boxed{A(x) = \frac{-1}{16}\left[\cos 5x + \cos 3x - \cos x\right]}$$

* $B(x) = (\mathrm{ch}^2 x)(\mathrm{sh}^3 x)$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)$$

$$\mathrm{sh}^3 x = \frac{1}{8}\left(e^x - e^{-x}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}\right)$$

$$B(x) = \frac{1}{32}\left[e^{5x} - 3e^{3x} + 3e^x - e^{-x} + 2e^{3x} - 6e^x + 6e^{-x} - 2e^{-3x} + e^x - 3e^{-x} + 3e^{-3x} - e^{-5x}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\left(e^{5x} - e^{-5x}\right) - \left(e^{3x} - e^{-3x}\right) - 2\left(e^x - e^{-x}\right)\right]$$

$$\boxed{B(x) = \frac{1}{16}\left[\mathrm{sh}\,5x - \mathrm{sh}\,3x - 2\,\mathrm{sh}\,x\right]}$$

Ex4: * $\frac{\pi}{4} + \arctan x = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$? , $D = \mathbb{R} - \{1\}$

Dérivons les deux membres de l'égalité :

$$\cdot \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{1-x+1-x}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = \frac{2}{2+2x^2}$$

donc on a bien sur D :

$$(\arctan x)' = \left(\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)'$$

et donc $\arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \arctg(x) + k$, k une constante.

Mais $D =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, donc à priori il existe deux constantes k_1, k_2 tq

$$\arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \arctg x + k_1 & \text{sur }]-\infty,1[\\ \arctg x + k_2 & \text{sur }]1,+\infty[. \end{cases}$$

+ Si $x=0$, on aura $\arctg\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = \arctg 1 = \pi/4$ et $\arctg 0 = 0$

d'où $k_1 = \pi/4$

* $\lim_{x\to+\infty} \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \arctg(-1) = -\pi/4$, $\lim_{x\to+\infty} \arctg x = \pi/2$

d'où $-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k_2 \Rightarrow k_2 = -\frac{3\pi}{4}$

Donc $\arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \arctg x + \pi/4 & \text{si } x \in]-\infty,1[\\ \arctg x - \frac{3\pi}{4} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$

Donc notre formule est valable dans l'intervalle $\boxed{]-\infty,1[}$.

* $2\arctg x = \arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \pi\,\text{sign}(x)$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$.

On vérifie facilement que $(2\arctg x)' = \left(\arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right)'$. Donc

$$2\arctg x = \begin{cases} \arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + k_1 & \text{sur }]-\infty,-1[\\ \arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + k_2 & \text{sur }]-1,1[\\ \arctg\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + k_3 & \text{sur }]1,+\infty[\end{cases}$$

En prenant des pts particuliers on aura : $k_1 = -\pi$, $k_2 = 0$, $k_3 = \pi$

Rappelons que $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$. D'où notre formule est valable dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.