Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1:

1. On donne $a = 148$ et $b = 51$ en base 10. Ecrire a et b en base 2, puis éffectuer, en base 2, les opérations $a + b$ et $a \times b$. Vérifier ensuite les résultats en revenant à la base 10.

2. Dans quelle(s) base(s) de numération notée(s) x, peut-on avoir

$$\overline{11}^{x} + \overline{6}^{x^3} = \overline{11}^{x^2}.$$

Exercice 2: En utilisant la notion de divisibilité, trouver (si elles existent) les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation polynômiale

$$5x^3 - 3x - 34 = 0.$$

Exercice 3: Montrer, par un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{21}$ est irrationnel ($\notin \mathbb{Q}$). Généraliser ensuite l'énoncé et la démonstration à $\sqrt{pq}$. Enfin, est-il vrai que: "pour tout entier naturel n, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ sauf si n est un carré parfait"?

Exercice 4: On définit le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant :

$$A = \left\{ \frac{[x]+1}{x} \Big/ \quad x > \frac{1}{2} \right\}$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Montrer que A est borné. Déterminer ensuite $\inf A$ et $\sup A$ en précisant s'ils sont dans A.

Exercice 5: Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré. On note m la borne inférieure de A. On pose

$$B = A \cap \,]-\infty, m+3[.$$

Montrer que B est minoré, puis déterminer sa borne inférieure.

Exercice 6: Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. l'équation $x^2|x^2 - 1| = 1$.

2. l'inéquation $|x^2 - 1| > \dfrac{1}{x^2}$.

Analyse 1 - 1ère année M.I - 2017/2018

Fiche de T.D N° 1 - Corrigé.

(Quelques indications sur les réponses).

Exercice 1 :

1/ $a = 148 = \overline{10010100}^2$; $b = 51 = \overline{110011}^2$

$a+b$:
$$\begin{array}{r} 10010100 \\ +\ \ 110011 \\ \hline 11000111 \end{array}$$

$a \times b$:
$$\begin{array}{r} 10010100 \\ \times\ \ 110011 \\ \hline 10010100 \\ 10010100\cdot \\ 10010100\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 10010100\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline 1110101111100 \end{array}$$

Pour la vérification, on a en base 10, $a+b = 199$ et $a \times b = 7548$ qu'on peut écrire en base 2.

2/ Soit à résoudre dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ l'équation :

$$\overline{11}^x + \overline{6}^{x^3} = \overline{11}^{x^2}$$

càd : $(x+1) + 6 = x^2+1$ (avec $x \geq 2$)

$\iff x^2 - x + 6 = 0$

A priori on a deux solutions $x = -2$ et $x = 3$, mais x est une base de numération ! Donc $\boxed{x = 3}$.

Exercice 2 : A résoudre dans $\mathbb{Z}$, $5x^3 - 3x - 34 = 0$. Elle peut s'écrire : $x(5x^2-3) = 34$, donc x (et $5x^2-3$) ~~est~~ un diviseur de 34. Les diviseurs de 34 sont $\{\pm 1, \pm 2, \pm 17\}$.

Après étude de tous les cas, on arrive à l'unique solution dans $\mathbb{Z}$, $\boxed{x = 2}$

Exercice 3 : a/ $\sqrt{21} \notin \mathbb{Q}$. En effet, supposons le contraire.

Alors $\exists\, a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux ($a \wedge b = 1$), tels que $\sqrt{21} = a/b \Longleftrightarrow a^2 = 21 b^2 = 3.7.b^2$. En privilégiant 3 par exemple, on peut dire : 3, premier, est diviseur de a^2, donc divise a. Alors $a = 3a_1 \Rightarrow 9a_1^2 = 3.7.b^2 \Rightarrow 3a_1^2 = 7.b^2$.

Maintenant 3 divise $7b^2$, mais étant premier avec 7, il divise b^2 et donc divise b (car 3 est premier). En définitive, 3 est un diviseur commun de a et b, ce qui est absurde.

b/ La généralisation à $\sqrt{pq}$ de la situation précédente, suggère de considérer p et q deux nombres premiers (car $21 = 3 \times 7$). Il est facile de voir que si $p = q$, alors $\sqrt{pq} = \sqrt{p^2} = p \in \mathbb{Q}$. Donc la généralisation s'énonce ainsi :

(*) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soient } p \text{ et } q \text{ deux nombres entiers premiers, avec } p \neq q. \\ \text{Alors } \sqrt{pq} \notin \mathbb{Q}.\end{array}\right.$

La démonstration est identique à la question a/.

c/ L'énoncé (*) peut encore se généraliser par :

$\left\{\begin{array}{l}\text{Soient } p_1, p_2, \dots, p_k \text{, k nombres premiers deux à deux distincts} \\ \text{alors } \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_k} \notin \mathbb{Q}.\end{array}\right.$

Maintenant soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (0 et 1 sont déjà des carrés parfaits). On décompose n en facteurs premiers : $n = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_r^{m_r}$; où $a_1 \dots a_r$ sont premiers. Si tous les m_j sont pairs, alors n est un carré parfait et $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ (même à $\mathbb{N}$). Si maintenant certains m_j sont impairs, on note $p_1 \dots p_k$ ceux des a_j où les m_j sont impairs. Alors $n = \ell^2 . p_1 \cdots p_k$ avec $\ell \in \mathbb{N}$. Donc $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ car $\sqrt{p_1 \cdots p_k} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4 : $A = \left\{ \frac{[x]+1}{x} \;/\; x > 1/2 \right\}$

On peut distinguer deux cas : $\frac{1}{2} < x < 1$ et $x \geq 1$

- Si $\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$ et $\frac{[x]+1}{x} = \frac{1}{x} \in]1, 2[$
- Si $x \geq 1$, alors $\exists k_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq $k_x \leq x < k_x + 1$, $(k_x = [x])$

donc $\frac{[x]+1}{x} = \frac{k_x+1}{x}$. Comme $k_x \leq x < k_x+1$

alors $\frac{1}{k_x+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k_x} \Rightarrow 1 < \frac{[x]+1}{x} \leq \frac{k_x+1}{k_x} = 1 + \frac{1}{k_x} \leq 2$.

En définitive $\forall x > 1/2$, $\frac{[x]+1}{x} \in]1, 2]$, ce qui prouve que A est borné.

. Pour $x = 1$, on a $\frac{[x]+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2 \in A$. Comme 2 est un majorant de A, qui est dans A, alors

$$2 = \operatorname{Sup} A = \max A .$$

. Regardons si $1 = \inf A$. Pour cela il faut voir s'il existe, $\forall \varepsilon > 0$, $y_\varepsilon \in A$ tq $1 \leq y_\varepsilon < 1 + \varepsilon$, $\left(y_\varepsilon = \frac{[x_\varepsilon]+1}{x_\varepsilon}, x_\varepsilon > 1/2 \right)$.

Voyons si ce x_ε peut être dans $]\frac{1}{2}, 1[$. Dans ce cas $y_\varepsilon = \frac{1}{x_\varepsilon}$ et on doit avoir donc $1 \leq \frac{1}{x_\varepsilon} < 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} < x_\varepsilon \leq 1$

il suffit de prendre $\boxed{x_\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 + \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right]}$.

Donc $1 = \inf A$. Mais $1 \notin A$.

Exercice 5 : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et $m = \inf A$. $B = A \cap]-\infty, m+3[$.

Comme $B \subset A$ et que $\forall x \in A$, $x \geq m$, alors m minore B aussi.

Notons $m_B = \inf B$. Il est évident que $m \leq m_B$.

La caractérisation (par les ε) de m donne : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in A$: $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$

Choisissons ε assez petit pour que $m + \varepsilon < m+3$ donc le x_ε de A vérifie $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon < m+3$, mais alors ce $x_\varepsilon \in B$ car il est dans A et dans $]-\infty, m+3[$.

Or tous les $x \in B$, $x \geq m_B$ donc $m_B \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon \Rightarrow m_B \leq m$.

Donc $\boxed{m_B = m}$.

Exercice 6 :

1°/ (E) : $x^2|x^2-1| = 1$. Signe de x^2-1 : $+ \; -1 \; - \; 1 \; +$

- Si $x \in [-1,1]$, (E) devient $x^2(-x^2+1)-1=0 \iff x^4-x^2+1=0$

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$ donc pas de solution réelle.

- Si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, (E) s'écrit $x^4-x^2-1=0$

$\Delta = 1+4=5 \implies x_1^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ impossible car $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$

ou $x_2^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \implies x_2 = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. $(|x_2|>1)$

D'où $S = \left\{ \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right\}$.

2°/ (F) : $|x^2-1| > 1/x^2$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ domaine de déf de l'inéq (F).

$\iff x^2|x^2-1|-1>0$.

- Si $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$, alors $-x^4+x^2-1>0$, $\Delta<0$ donc pas de sol.

$(S_1 = \emptyset)$

- Si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, alors $x^4-x^2-1>0$

Si on pose $X = x^2$, l'inéquation s'écrit $X^2-X-1>0$

qui admet pour solution l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[\cup]\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty[$.

Mais $X=x^2$ doit être positif. Donc $X \in]\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty[$

ou bien $|x| > \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ donc l'ensemble solution est

dans ce cas $]-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[\cup]\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty[= S_2$

Enfin la solution de (F) est donnée par $S = S_1 \cup S_2$

$$\boxed{S = \left]-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty\right[}$$