Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2017/2018
Liste 3 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 2: Partie1: **Ensembles**

Exercice1. Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies.
a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
c) $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
d) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Solution: *a)* $(]0, +\infty[\cap] - \infty, 1[) \cup \{0\} = [0, 1[$
b) $]3, +\infty[\cap] - \infty, 5[\cap\overline{\{4\}} =]3, +\infty[\cap] - \infty, 5[\cap(] - \infty, 4[\cup]4, +\infty[) =]3, 4[\cup]4, 5[$
$(\overline{\{4\}}$ est le complémentaire de $\{4\}$ dans $\mathbb{R})$
c) $(] - \infty, 0]\cap]1, +\infty[) \cup \{4\} = \varnothing \cup \{4\} = \{4\}$
d) $(x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2) \Leftrightarrow (\overline{x \geq 0}$ *ou* $x \geq 2) \Leftrightarrow (x < 0$ *ou* $x \geq 2)$. D'ou: $] - \infty, 0[\cup[2, +\infty[$.

Exercice2. Soit $E = \{a, b, c\}$. Peut-on écrire:
$a \in E$, $a \subset E$, $\{a\} \subset E$, $\varnothing \in E$, $\varnothing \subset E$, $\{\varnothing\} \subset E$?

Solution: $a \in E$, on peut l'écrire car a est un élément de E.
$a \subset E$, on ne peut pas l'écrire car a n'est pas un sous ensemble de E.
$\{a\} \subset E$, on peut l'écrire car $\{a\}$ est un sous ensemble de E.
$\varnothing \in E$, on ne peut pas l'écrire car $\varnothing$ n'est pas un élément de E. On écrit plutôt $\varnothing \in P(E)$ (ensemble des parties de E)
$\varnothing \subset E$, on peut l'écrire car $\varnothing$ est un sous ensemble de E.
$\{\varnothing\} \subset E$, on ne peut pas l'écrire car $\{\varnothing\}$ est l'ensemble des parties de $\varnothing$.

Exercice3. Etant donné A, B et C trois parties d'un ensemble E. Justifier les équivalences suivantes :
a) *(sup)* $A \subset B \Leftrightarrow A\cup B = B$
b) *(sup)* $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
d) $[A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C] \Leftrightarrow B = C$

Solution: *a)* $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ et $A\cup B = B \Rightarrow A \subset B$. D'ou l'équivalence.
b) $A = B \Rightarrow A \cap B = A \cup B$ est évident.
c) Montrons que $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$.

On a $B \subset A \cup B$ donc $B \subset A \cap C \subset A \subset A \cup B$. Or $A \cup B = A \cap C \subset C$. Donc $B \subset A \subset C$.
Montrons que $B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$.
Le fait que $B \subset A \subset C$ alors on déduit que $A \cup B = A = A \cap C$.
d) Montrons que $[A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C] \Rightarrow B = C$.
Soit $x \in B$. Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$. Si $x \notin A$ alors $x \in A \cup B$ (car $x \in B$), donc $x \in A \cup C$. Puisque $x \notin A$ donc forcément $x \in C$. D'ou $B \subset C$.
Remarquons que dans $[A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C]$, on peut changer B en C et C en B et garder la même assertion. D'ou $C \subset B$. Donc $B = C$.
Montrons que $(B = C) \Rightarrow [A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C]$. C'est évident.

Exercice4. (sup) Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer que $A \triangle B = A \cap B \Rightarrow A = B = \varnothing$. ($A \triangle B$ *est l'ensemble différence symétrique de* A *et* B).

Solution: On sait que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Or on a $A \triangle B = A \cap B$, donc $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap B$ donc $A \cup B = A \cap B = \varnothing$, ceci nous donne $A = B = \varnothing$.