Nom : --
Prénom : --
Date de Naissance : -------------------------------------

Département de Mathématiques	21/06/2018
Faculté des Sciences	Rattrapage Algèbre 1
Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen	Durée : 1h-30'

(4pts) EXERCICE 1 : Soient A, B et C trois sous ensembles d'un ensemble E et soit le sous ensemble noté par $non(A)$ le complémentaire de A dans E.

1- Montrer que $(A \cap B) \cap non(A \cap C) = (A \cap B) \cap non(C)$.
2- Déduire que $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$.

1- $(A \cap B) \cap non(A \cap C) = (A \cap B) \cap (non(A) \cup non(C))$ 0.5

$= (A \cap B \cap non(A))$ 0.5 $\cup$ $(A \cap B \cap non(C))$ 0.5 $= A \cap B \cap non(C)$

2- Avant tout, il faut remarquer que si on permute B et C dans l'équation de la question 1-, on aura :
$(A \cap C) \cap non(A \cap B) = A \cap C \cap non(B)$. 0.5
D'où :

$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$ 0.5

$= ((A \cap B) \cap non(A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cap non(A \cap B))$
$= (A \cap B \cap non(C)) \cup (A \cap C \cap non(B))$ 0.5
$= A \cap ((B \cap non(C)) \cup (C \cap non(B)))$ 0.5
$= A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A \cap (B \Delta C)$. 0.5

(6 points) EXERCICE2 : Soít D $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-y \leq x \leq y\}$.

Soít f : D $\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2,\ 2xy)$.

1- Représenter D dans le plan.

2- a- Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient :

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_1 - y_1 \end{cases}$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

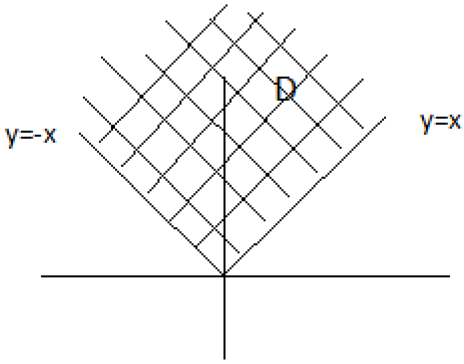
b- Montrer que f est injective.

3- f est-elle surjective ?

1- D est l'intersection des deux parties du plan $\mathbb{R}^2$ à savoir : 1 pt

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-x \leq y\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y\}$.

2- a



$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

La somme des deux équations nous donne facilement : 1 pt

$x_1 = x_2$ puis $y_1 = y_2$.

Figure sur 0.5

b- f est injective, en effet : $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ ssi $(x_1{}^2 + y_1{}^2,\ 2x_1y_1) = (x_2{}^2 + y_2{}^2,\ 2x_2y_2)$ ssi $(x_1{}^2 + y_1{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2$ et $2x_1y_1 = 2x_2y_2$). 1 pt

On a : $x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2x_1y_1 = x_2{}^2 + y_2{}^2 - 2x_2y_2$, soít

$-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ d'où $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ 1 pt

et on a : $x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2x_1y_1 = x_2{}^2 + y_2{}^2 + 2x_2y_2$, soít

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, 1 pt

d'où selon a) on déduit que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

3- f n'est pas surjective, en effet : (-1, 1) est dans $\mathbb{R}^2$, mais il n'est l'image d'aucun point (x, y) de l'ensemble D, puisque $x^2 + y^2 > 0$. 0.5 pt

(4 points) EXERCICE3 : Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y')$ si et seulement si $x = x'$.

1- $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?
2- Que représente, pour $\mathcal{R}$, l'ensemble des points qui appartiennent à la droite d'équation $x = -2$?

1- $\mathcal{R}$ est réfléxive ; en effet :

Pour (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, on a $x=x$ ssi $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x, y)$ 0.75

$\mathcal{R}$ est symétrique ; en effet :

Pour $(x, y), (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$ $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y')$ implique $(x', y')\ \mathcal{R}\ (x, y)$, puisque $x=x'$ et donc $x'=x$. 0.75

$\mathcal{R}$ est transitive ; en effet :

Pour $(x, y), (x', y')$ et (x'', y'') dans $\mathbb{R}^2$ on a : $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y')$ et $(x', y')\ \mathcal{R}\ (x'', y'')$ implique $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x'', y'')$, puisque $x = x' = x''$. 0.75

2- $Cl((-2, y)) = \{(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $(x, y)\ \mathcal{R}\ (-2, y)\}$ 0.75

$= \{(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $x = -2\}$ 0.5

$=$ droite d'équation $x = -2$. 0.5

EXERCICE4 : On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\mathcal{S}$ par :

$(x, y)\ \mathcal{S}\ (x', y')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y \leq y'$.

1- Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2- L'ordre est-il total ?
3- Le disque fermé de centre le point O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?

1- $\mathcal{S}$ est réfléxive : en effet, pour (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ $(x \leq x$ et $y \leq y)$ ssi $(x, y)\ \mathcal{S}\ (x, y)$ 0.75

$\mathcal{S}$ est anti-symétrique : en effet, pour $(x, y), (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$ $x \leq x' \leq x$ et $y \leq y' \leq y$, d'où $x = x'$ et $y = y'$ 0.75

$\mathcal{S}$ est transitive : en effet, pour $(x, y), (x', y')$ et (x'', y'') dans $\mathbb{R}^2$ on a $(x, y)\ \mathcal{S}\ (x', y')$ et $(x', y')\ \mathcal{S}\ (x'', y'')$ implique $x \leq x''$ et $y \leq y''$, d'où $(x, y)\ \mathcal{S}\ (x'', y'')$. 0.75

2- L'ordre n'est pas total : en effet, en choisissant $(x, y) = (1,0)$ et $(x', y') = (0,1)$, on a ni $(1, 0) \leq (0, 1)$ ni $(0, 1) \leq (1, 0)$. 1.5

3- D = disque fermé = $\{(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 \leq 1\}$. -------------
Soit (x, y) un majorant de D. Alors $(1, 0) \leq (x, y)$ et donc $1 \leq x$. De même $(0, 1) \leq (x, y)$ et donc $1 \leq y$. réciproquement, si (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ est tel que $1 \leq x$ et $1 \leq y$, alors (x, y) ne peut être qu'un majorant de D. En effet, si (a, b) est dans D alors $a^2 + b^2 \leq 1$ et donc $a \leq 1$ et $b \leq 1$. ------------------------------ 0.75

L'ensemble des majorants de D est :
$\{(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $1 \leq x$ et $1 \leq y\}$.0.5

D n'admet pas de plus grand élément puisqu'aucun majorant de D n'est dans D. 0.5

De l'ensemble des majorants de D, on peut déduire le plus petit des majorants = borne supérieure et qui est le point $(1, 1)$. 0.5

FIN