Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math

Année Universitaire 2017/2018
Lundi 15/01/2018
1ière Année LMD-MI

ÉPREUVE FINALE DE MECANIQUE

Durée : 01 h 30mn

<u>Questions de cours</u> : (6 pts)

1) Dans un référentiel galiléen, on considère un point matériel soumis à plusieurs forces, certaines sont conservatives et d'autres non conservatives.

a- A quoi est égale la variation de l'énergie cinétique entre deux point de la trajectoire.

b- A quoi est égale la variation de l'énergie mécanique entre deux point de la trajectoire.

c- Une force de frottement est-elle conservative ? quelle est le signe de son travail ? justifier votre réponse.

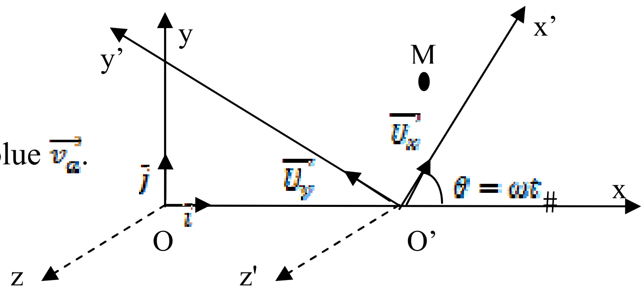
2) On considère un système de deux points matériels, quelle est la quantité de mouvement de ce système en deux instants différents. Que pouvez-vous dire sur ces deux valeurs?

3) Un chariot de masse m=1kg est lancé avec une vitesse initiale v_0=5m/s vers le haut d'un plan incliné qui fais un angle α=30° avec l'horizontale sans frottement.

Déterminer la distance parcourue par le chariot jusqu'à son arrêt complet.

<u>Exercice 1</u> (8 pts)

Soit le repère R(Oxyz) où le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec **une accélération constante** γ et avec une vitesse initiale (**$v_0 \neq 0$**). On lie à O' le repère (O'XYZ) qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Les coordonnées d'un mobile M dans le repère mobile sont **$x'=(t+1)$** et **$y'=t^2$**. A l'instant t=0, le point O' est confondu avec le point O.



Calculer dans **le repère mobile** :

1- La vitesse relative $\vec{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\vec{v_a}$.

2- L'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\vec{a_a}$.

<u>Exercice 2</u> (6 pts)

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Trouver :

1. L'équation de la trajectoire.
2. Les composantes du vecteur vitesse et accélération et leurs modules.
3. La nature du mouvement.
4. Les accélérations tangentielle et normale et déduire le rayon de courbure.

Bon courage

Corrigé d'examen final de mécanique

2017/2018

Questions de cours : (6 pts)

1)

a- $\Delta Ec = \sum W_{(\vec{F}_{ext})}$ **(01 pts)**

b- $\Delta E_M = \sum W_{(\vec{F}_{non\ conservatives})}$ **(01 pts)**

c- La force de frottement est une force non conservative, le signe de son travail est négatif car c'est un travail résistant. **(0.5 pts)**

2) $P(t_1)= m_1v_1+ m_2v_2$ et $P'(t_2)= m_1v'_1+ m_2v'_2$ **(0.5 pts)**

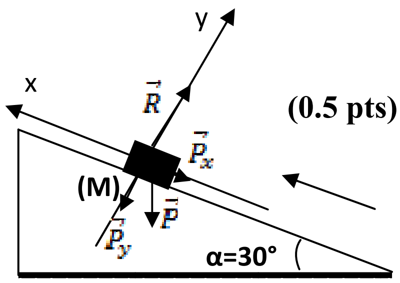
Dans un référentiel galiléen un système de plusieurs particules reste en mouvement avec la même quantité de mouvement, $P(t_1)= P'(t_2)$. **(0.5 pts)**

4) Un chariot de masse m=1kg est lancé avec une vitesse initiale v_0=5m/s vers le haut d'un plan incliné qui fais un angle α=30° avec l'horizontale sans frottement.

d= ?

on a $v_f^2 - v_i^2 = 2.a.d$ **(0.25 pts)**

$\Rightarrow -v_i^2 = 2.a.d \Rightarrow d = \frac{-v_i^2}{2.a}$ **(0.25 pts)**



(0.5 pts)

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R}$ **(0.5 pts)**

Projection : (ox) : -m.g.sinα=ma (1) **(0.25 pts)**

(oy) : R=m.g.cosα

(1) ⇒a=-g.sinα **(0.25 pts)**

donc $d = \frac{v_i^2}{2.g.sin\alpha}$ =2.5m **(0.5 pts)**

Exercice 1 (8 pts)

1- Les vitesses (04 pts)

$\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$ **(0.25 pts)** avec $\overrightarrow{O'M} = (t+1)\,\vec{u_x} + t^2\,\vec{u_y}$ **(0. 5 pts)**

donc $\vec{v_r} = \vec{u_x} + 2t\vec{u_y}$ **(0.5 pts)**

$\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ **(0.25 pts)** avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ **(0.25 pts)**

$\overrightarrow{OO'} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t\right)\vec{i}$ **(0.5 pts)**

donc $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = (\gamma t + V_0)\,\vec{i} = (\gamma t + V_0)(cos\omega t\,\vec{u_x} - sin\omega t\,\vec{u_y})$ **(0.25 pts)**

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ (t+1) & t^2 & 0 \end{vmatrix} = -t^2\omega\overrightarrow{u_x} + (t+1)\omega\,\overrightarrow{u_y}$$ (0.25 pts)

$$\overrightarrow{v_e} = [(\gamma t + V_0)\cos\omega t - t^2\,\omega\,]\overrightarrow{u_x} + [-(\gamma t + V_0)\sin\omega t + t\omega + \omega]\overrightarrow{u_y}$$ (0.25 pts)

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$$ (0.25 pts)

$$\overrightarrow{v_a} = [(\gamma t + V_0)\cos\omega t - t^2\omega + 1\,]\overrightarrow{u_x} + [-(\gamma t + V_0)\sin\omega t + t\omega + \omega + 2t]\overrightarrow{u_y}$$ (0.75 pts)

2- **Les accélérations : (04 pts)**

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = 2\overrightarrow{u_y}$$ (01 pts)

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$ (0.25 pts)

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \gamma\,\vec{i} = \gamma\left(\cos\omega t\,\overrightarrow{u_x} - \sin\omega t\,\overrightarrow{u_y}\right)$$ (0.25 pts)

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -t^2\omega & (t+1)\omega & 0 \end{vmatrix} = -(t+1)\omega^2\,\overrightarrow{u_x} - t^2\omega^2\overrightarrow{u_y}$$ (0.25 pts)

$$\overrightarrow{a_e} = (\gamma\cos\omega t - t\omega^2 - \omega^2)\,\overrightarrow{u_x} + (-\gamma\sin\omega t - t^2\omega^2)\,\overrightarrow{u_y}$$ (0.25 pts)

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ 1 & 2t & 0 \end{vmatrix} = -4t\omega\,\overrightarrow{u_x} + 2\omega\,\overrightarrow{u_y}$$ (01 pts)

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$ (0.25 pts)

$$\overrightarrow{a_a} = (\gamma\cos\omega t - t\omega^2 - \omega^2 - 4t\omega)\,\overrightarrow{u_x} + (-\gamma\sin\omega t - t^2\omega^2 + 2\omega + 2)\overrightarrow{u_y}$$ (0.75 pts)

<u>Exercice 2</u> : (06 pts)

On a $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

1- L'équation de trajectoire :

$$x = v_0 t \rightarrow t = \frac{x}{v_0}\ (0.5\ \text{pts}) \rightarrow y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

Donc

$$y = \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2}$$ ##(0.5 pts)

2- La vitesse et l'accélération :

$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = gt \end{cases}$ **(0.5 pts)** Donc $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{v_0{}^2 + g^2t^2}$ **(0.5 pts)**

et $\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = g \end{cases}$ **(0.5 pts)** Donc $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{g^2} = g$ **(0.5 pts)**

3- Nature du mouvement

$\vec{a}.\vec{v} = g^2t > 0$ donc le mouvement est uniformément varié accéléré **(0.5 pts)**

4- Calcul de a_T, a_N :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{v_0{}^2 + g^2t^2}\right)}{dt} = \frac{2g^2t}{2\sqrt{v_0{}^2 + g^2t^2}} = \frac{g^2t}{v}$$ **(01 pts)**

$$a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 \Rightarrow a_N{}^2 = a^2 - a_T{}^2 = g^2 - \frac{g^4t^2}{v^2}$$ **(0.5 pts)**

Donc $a_N = \sqrt{g^2 - \frac{g^4t^2}{v^2}} = \sqrt{g^2\left(1 - \frac{g^2t^2}{v^2}\right)} = g\sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{v_0{}^2 + g^2t^2}} = \frac{gv_0}{v}$ **(0.5 pts)**

d'où $a_N = \frac{gv_0}{v}$

5- $a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{gv_0}$ **(0.5 pts)**