Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Examen Final.
Dimanche 14/01/2018 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

**Exercice 1:** (08pts) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) \qquad \sqrt{x+1} = x^2.$$

1. Etudier les fonctions $g(x) = \sqrt{x+1}$ et $h(x) = x^2$ puis tracer leurs graphes dans le même repère.
2. Déduire de ces représentations graphiques l'existence de deux solutions réelles pour (E). Donner pour chacune, un intervalle dans lequel n'existe qu'une seule de ces solutions.
3. Montrer que (E) est équivalente à $f(x) = 0$ où $f(x) = x^4 - x - 1$.
4. Démontrer rigoureusement les résultats de la deuxième question en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f$ dans des intervalles convenables (Justifier toutes les affirmations).

**Exercice 2:** (07pts) On considère la fonction réelle $F(x) = e^{-x^2}$.

1. Calculer les dérivées $F', F''$ et $F^{(3)}$.
2. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange de $F$ à l'ordre 2, centrée en 0, dans l'intervalle $[0, x], \quad x > 0$.
3. En déduire l'inégalité $\left|\dfrac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^3}\right| \leq \dfrac{2}{3}x(3 + 2x^2).$
4. Calculer ensuite la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\dfrac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^2 \sin x}\right).$

**Exercice 3:** (05pts) Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ un point fixé. On considère $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ seulement. Montrer que si on suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} u'(x) = a$ existe, alors $u$ est dérivable en $x_0$ aussi.
Indication : utiliser le théorème des accroissements finis.

# $1^{\text{ère}}$ année M.I – Semestre 1 (2017/2018)

## Module : "Analyse 1" – Epreuve Finale – Corrigé.

**Ex 1 : (08 pts)** (E) : $\sqrt{x+1} = x^2$

1°/ Etude de $g$ et $h$ : $g(x) = \sqrt{x+1}$, $\mathcal{D}_g = [-1, +\infty[$.

$g(-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, donc $(C_g)$ admet une branche parabolique dans la direction de $\vec{Ox}$ au voisinage de $+\infty$.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$, 0,25

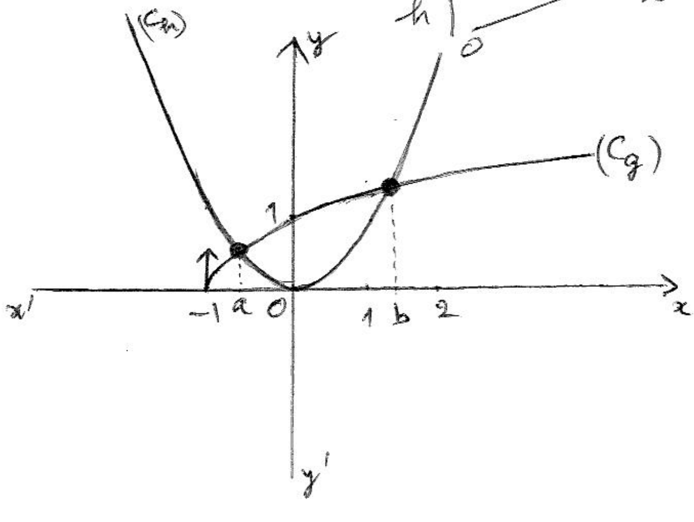
| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $\parallel$ | $+$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$h(x) = x^2$, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$, $h$ est paire $\Rightarrow$ étude sur $[0, +\infty[$.

$h(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$, donc $(C_h)$ admet une branche parabolique dans la direction de $\vec{Oy}$ au voisinage de $+\infty$ 0,25

$h'(x) = 2x \geq 0$ sur $[0, +\infty[$,

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'$ | $0$ | $+$ | |
| $h$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




0,5

2°/ On remarque que graphiquement il existe deux points d'intersection de $(C_g)$ et $(C_h)$, càd (E) possède deux solutions réelles a et b 1 avec $a \in [-1, 0]$ et $b \in [1, 2]$. Pour b on a : $h(1) = 1 < \sqrt{2} = g(1)$ et $h(2) = 4 > \sqrt{3} = g(2)$.

3°/ (E) équivalente à $[f(x)=0]$ veut dire que toute solution de (E) est solution de $[f(x)=0]$ et inversement.

* Soit $x_0$ solution de (E) $(\sqrt{x_0+1}=x_0^2)$, en élevant au carré on a $x_0+1=x_0^4$ d'où $f(x_0)=0$. 0,5

* Soit $x_0$ solution de $f(x)=0$ càd $x_0^4=x_0+1$, alors d'abord $x_0>-1$ car $x_0+1=x_0^4\geq 0$ et $x_0\neq 0$ (évident). On passe aux racines carrées : $\sqrt{x_0+1}=\sqrt{x_0^4}=|x_0^2|=x_0^2$ (c'est un carré $\Rightarrow$ positif). 0,5

4°/ (E) étant équivalente à $[f(x)=0]$ ; on peut dire :

* $f$ est continue sur $[-1,0]$ car c'est un polynôme, et $f(-1)=(-1)^4-(-1)-1=1$ et $f(0)=-1$. Ainsi $0\in[f(0),f(-1)]$ et par le thm des valeurs intermédiaires $\exists\, a\in[-1,0]$ tq $f(a)=0$. 2,5

Ce $a$ est <u>unique</u> car sur $[-1,0]$ $f$ est strictement monotone, en effet, $f'(x)=4x^3-1$, si $-1\leq x\leq 0\Rightarrow -5\leq 4x^3-1\leq -1<0$ ($f$ est strictement décroissante)

* On a aussi $f$ continue sur $[1,2]$ (c'est toujours un polynôme) et $f(1)=1-1-1=-1$, $f(2)=2^4-2-1=13$.

Ainsi $0\in[f(1),f(2)]$ ; donc $\exists\, b\in[1,2]$ tq $f(b)=0$ à l'aide du thm des valeurs intermédiaires. 2,5

Ce $b$ est aussi <u>unique</u> car sur $[1,2]$, $f$ est strictement monotone, en effet : si $1\leq x\leq 2\Rightarrow 3\leq 4x^3-1\leq 7$ càd $f'(x)>0$ et $f$ est strictement croissante sur $[1,2]$.

EX2 : (07 pts) $F(x) = e^{-x^2}$

1°/ Calcul des dérivées : $\boxed{F'(x) = -2x\,e^{-x^2}}$ 0,5

$F''(x) = -2\,e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = \boxed{(4x^2-2)\,e^{-x^2}}$ 0,5

$F'''(x) = 8x\,e^{-x^2} - 2x(4x^2-2)\,e^{-x^2}$

$= e^{-x^2}(-8x^3+12x) \Rightarrow F'''(x) = \boxed{F^{(3)}(x) = 4x(3-2x^2)e^{-x^2}}$ 0,5

2°/ Formule de Taylor-Lagrange : Elle s'écrit :

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1!}F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F^{(3)}(c), \quad 0 < c < x$$

ou bien $$F(x) = F(0) + \frac{x}{1!}F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F^{(3)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

En remplaçant on obtient :

$$\boxed{F(x) = 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^3 c(3-2c^2)e^{-c^2} \quad 0 < c < x}$$ 1,5

ou bien $$\boxed{F(x) = 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4\theta(3-2\theta^2x^2)\,e^{-\theta^2x^2}, \quad 0 < \theta < 1}$$

3°/ L'inégalité : Utilisons la version en "c" :

$$F(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^3} = \frac{2}{3}c(3-2c^2)e^{-c^2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^3}\right| \leq \frac{2}{3}c(3+2c^2) \text{ car } e^{-c^2} \leq 1 \text{ et comme } 0<c<x$$ 2,5

alors on aura : $$\boxed{\left|\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^3}\right| \leq \frac{2}{3}x(3+2x^2)}$$

4°/ La limite : D'après la question précédente on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^3} = 0$ 1,5

or $$\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^2\sin x} = \frac{(e^{-x^2}-1+x^2)}{x^3}\frac{(x)}{(\sin x)} \longrightarrow 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$$

Ex3 : (05 pts)

Hypothèses : * $u$ continue sur $I$

* $u$ dérivable sur $I - \{x_0\}$

* $\lim_{x \to x_0} u'(x) = a$ (existe et est finie).

Problème : $u$ est dérivable en $a$.

On doit montrer que $\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$ existe. Montrons que les limites à gauche de $x_0$ et à droite de $x_0$ existent et sont égales.

* Soit $x < x_0$, $(x \in I)$, $u$ est continue sur $[x, x_0]$ et dérivable sur $]x, x_0[$, donc par le thm des A.F

on a : $\exists\, c_x \in ]x, x_0[$ tq $u(x_0) - u(x) = (x_0 - x)\, u'(c_x)$

càd $\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(c_x) \Rightarrow \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} - a = u'(c_x) - a.$ 2,5

D'autre part grâce à la 3ème hypothèse on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0 : \forall x : x_0 - \alpha_\varepsilon \leq x \leq x_0 + \alpha_\varepsilon \Longrightarrow |u'(x) - a| \leq \varepsilon$

or $x < c_x < x_0 \Rightarrow x_0 - \alpha_\varepsilon \leq c_x \leq x_0 + \alpha_\varepsilon \Longrightarrow |u'(c_x) - a| \leq \varepsilon$

càd on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0 : \forall x,\ x_0 - \alpha_\varepsilon \leq x < x_0 \Rightarrow \left| \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} - a \right| \leq \varepsilon$

ceci est exactement la définition de $\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = a}$

* Le même raisonnement est valable à droite de $x_0$ car dans ce cas $x_0 < c_x < x$. 2,5