Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Rattrapage du contrôle.
Lundi 11/12/2017 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (06pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{4-x} \leq 2-|x|.$$

Exercice 2: (08pts) On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in]0, 10[$.
2. Montrer par récurrence que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3: (06pts) On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ définit par

$$E = \left\{ x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad / \quad a, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Montrer que E est borné, puis déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Première Année M.I - Semestre 1 - 2017/2018.

Module "Analyse I" - Corrigé du Rattrapage du Contrôle.

Exercice 1: (06 pts) Soit à résoudre $\sqrt{4-x} \leq 2-|x|$

Le domaine de définition de l'inéquation est $\mathcal{D} =]-\infty, 4]$. 1pt

Mais si $2-|x|<0$ alors elle n'admettra pas de solution donc la résolution se fait sur

$$I = \{x \in \mathcal{D} / 2-|x| \geq 0\}$$

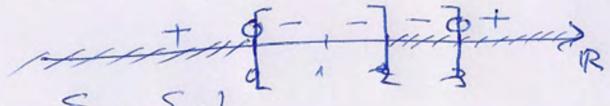
$$I = \mathcal{D} \cap [-2,2] = [-2,2].$$ 1pt

Elevons au carré, $4-x \leq (2-|x|)^2$

$$\iff 4-x \leq 4-4|x|+x^2$$

$$\iff x^2-4|x|+x \geq 0$$ 1pt

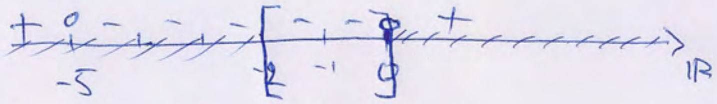
- Si $x \in [0,2]$: l'inéquation devient $x^2-3x \geq 0$



1,5

Donc $S_1 = \{0\}$

- Si $x \in [-2,0]$: l'inéquation devient $x^2+5x \geq 0$



1,5

et donc $S_2 = \{0\}$ aussi.

En définitive $\boxed{S = \{0\}}$

Exercice 2 : (08 pts) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1°/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,10[$:

* Pour $n=0$, $u_0 = 1 \in]0,10[$ (évident)
* Supposons que $u_n \in]0,10[$, càd $0 < u_n < 10$

alors $6 < u_n + 6 < 16 \Rightarrow \sqrt{6} < \sqrt{6+u_n} < \sqrt{16}$ — 3pts

car la fonction $\sqrt{x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$.

Donc $0 < \sqrt{6} < u_{n+1} \leq 4 < 10$ càd $u_{n+1} \in]0,10[$.

2°/ (u_n) est croissante : Il faut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

* Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} > 1$. — 1 pt
* Supposons que $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow 6 + u_n \leq 6 + u_{n+1}$ — 2pts

$\Rightarrow \sqrt{6+u_n} \leq \sqrt{6+u_{n+1}}$ càd $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

3°/ (u_n) convergente : Comme (u_n) est croissante majorée par 10 alors (u_n) est convergente, soit l sa limite.

l vérifie l'équation $l = \sqrt{6+l}$

$\Rightarrow l^2 - l - 6 = 0$, $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$ — 1

$l = l_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ ou $l = l_2 = \frac{1+5}{2} = 3$.

$l > 0$ car $\forall n$, $u_n > 0$ donc $\boxed{l = 3}$. — 1

Exercice 3 : (06 pts)

$$E = \left\{ x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ / \ a, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1°/ E est borné : Comme $a, b \in \mathbb{N}^*$ alors $a \geq 1$ et $b \geq 1$ donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$, aussi $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b} > 0$ (évident) donc $E \subset]0, 2]$, donc E borné — 1,5 pt

2°/ Sup E : On vient de voir que $\forall x \in E$, $x \leq 2$. Mais pour $a = b = 1$, $x = 2$ càd $2 \in E$.

donc $\boxed{\sup E = \max E = 2}$ — 1,5 pt

3°/ inf E ; pour a, b grands, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont petits positifs, ce qui suggère que $\inf E = 0$. Montrons-le par la ε-caractérisation de la borne inf. On a bien $0 < x$, $\forall x \in E$ donc 0 est un minorant de E.

Soit $\varepsilon > 0$, trouvons $x_\varepsilon \in E$ tq $0 \leq x_\varepsilon < \varepsilon$; càd trouvons a_ε et $b_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\frac{1}{a_\varepsilon} + \frac{1}{b_\varepsilon} < \varepsilon$. Il suffit d'avoir $\frac{1}{a_\varepsilon} < \varepsilon/2$ et $\frac{1}{b_\varepsilon} < \varepsilon/2$, ou encore $a_\varepsilon > 2/\varepsilon$ et $b_\varepsilon > 2/\varepsilon$ — 3 pts

Par exemple $a_\varepsilon = b_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ conviennent.

Donc $\boxed{\inf E = 0}$