Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
1ière Année LMD-MI
Jeudi: 16/11/2017
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2017/2018

Contrôle Continu de Mécanique

(La calculatrice est autorisée et un point sur l'organisation de la copie)

Exercice 1: (6 pts)

La vitesse limite atteinte par un parachute lesté est fonction de son poids P et de sa surface S, est donnée par : $v = \sqrt{\frac{P}{K.S}}$

1) Donner la dimension de la constante k.
2) Calculer la vitesse limite d'un parachute ayant les caractéristiques suivantes :
M=90 kg, S=80 m2, g=9,81 m/s2, et k=1,15 MKS.
3) Le poids étant connu à 2 % près et la surface à 3 %, calculer l'incertitude relative $\frac{\Delta v}{v}$ sur la vitesse v, ainsi l'incertitude absolue Δv et déduire l'écriture condensée de cette vitesse.

Exercice 2: (5 pts)

A. Dans l'espace vectoriel rapporté à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{U}(0, 3, 1)$, $\vec{V}(0, 1, 2)$.

1) Calculer le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$ et l'angle φ aigu entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
2) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ puis calculer $\|\vec{W}\|$ par deux méthodes. Que représente ce dernier.
3) Calculer le produit mixte $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$, que représente ce produit.

B. Chacune des expressions suivantes a-t-elle un sens ? Si oui préciser s'il s'agit d'un vecteur ou d'un réel. Si non dire pourquoi (sans calcul) :

1) $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$	**2)** $\vec{A} \wedge (\vec{B}.\vec{C})$	**3)** $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$
4) $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$	**4)** $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{B})$	**5)** $(\vec{A} \wedge \vec{B}).(\vec{C} \wedge \vec{C})$

Exercice 3: (8 pts)

Soit un repère cylindrique d'origine O, de vecteurs unitaires $\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}$. **M** est un point quelconque de coordonnées (ρ, θ, z).

1) A l'aide d'un schéma détaillé, donner l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}$.
2) Trouver le vecteur vitesse en coordonnées cylindrique.
3) Exprimer le vecteur de déplacement élémentaire en coordonnées cylindrique.
4) Ecrire l'expression du volume élémentaire dans ce repère et déduire le volume d'un cylindre.

Bon courage

Le corrigé du Contrôle Continu

Exercice 1: (6 pts)

1- La dimension de k :

on a (01 pts) $\begin{cases} [p] = M.L.T^{-2} \text{(0.25 pts)} \\ [S] = L^2 \text{ (0.25 pts)} \\ [k] = 1 \text{(0.25 pts)} \\ [v] = L.T^{-1} \text{(0.25 pts)} \end{cases}$ $et\ k = \frac{p}{v^2.s} \Rightarrow [k] = \frac{[p]}{[v]^2.[s]}$ **(0.5 pts)**

$\Rightarrow [k] = [p].[v]^{-2}.[s]^{-1} \Rightarrow [k] = M.L^{-3}$ **(0.5 pts)**

2- A.N : $v = \sqrt{\frac{P}{K.S}} = 3.097m/s$ **(0.5 pts)**

3- $\frac{\Delta P}{P} = 2\% = 0.02$ et $\frac{\Delta S}{S} = 3\% = 0.03$

On utilisant la méthode logarithmique pour calculer l'incertitude relative sur *v* :

$v = \sqrt{\frac{P}{K.S}} \Rightarrow \log v = \log\sqrt{\frac{P}{K.S}} = \frac{1}{2}\log P - \frac{1}{2}\log k - \frac{1}{2}\log S$ **(0.5 pts)**

$\Rightarrow d\log v = \frac{1}{2}d\log P - \frac{1}{2}d\log k - \frac{1}{2}d\log S$ **(0.5 pts)**

$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dp}{p} - \frac{1}{2}\frac{dS}{S}$ **(0.5 pts)** $\Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta p}{p}\right| + \frac{1}{2}\left|-\frac{\Delta S}{S}\right| \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{2}\frac{\Delta S}{S}$ **(0.5 pts)**

A.N : $\frac{\Delta v}{v} = 0.025$ **(0.5 pts)**

L'incertitude absolue sur v est donnée par :

$\Delta v = v.\frac{\Delta v}{v} = v * \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{2}\frac{\Delta S}{S}\right) = 0.077m/s$ **(0.5 pts)**

d'où l'écriture condensée de *v* est donnée par : *v*=(3.097±0.077)m/s **(0.5 pts)**

Exercice 2: (5 pts)

A.

1- Dans l'espace vectoriel R3 rapporté à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{U}(0, 3, 1)$, $\vec{V}(0, 1, 2)$

$\vec{U}.\vec{V}$=3.1+2.1=5 **(0.5 pts)**

D'autre part, nous avons

$\vec{U}.\vec{V} = |\vec{U}|.|\vec{V}|\cos(\vec{U},\vec{V}) \Rightarrow \cos(\vec{U},\vec{V}) = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}|.|\vec{V}|}$ **(0.25 pts)**

Avec $|\vec{U}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}, |\vec{V}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ **(0.5 pts)**

Donc $\cos(\vec{U},\vec{V}) = \cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **(0.25 pts)**

2- Le produit vectoriel $\vec{U}\wedge\vec{V}$:

$$\vec{W} = \vec{U}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3x2 - 1x1)\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Donc $\vec{W} = 5\,\vec{i}$ **(0.5 pts)**

- Calculons $|\vec{W}|$ par deux méthodes différentes :

  1ere méthode :

$|\vec{W}| = |\vec{U}\wedge\vec{V}| = 5$ **(0.25 pts)** ce module représente la surface du parallélogramme formé par ces deux vecteurs. **(0.25 pts)**

  2eme méthode :

$$|\vec{W}| = |\vec{U}||\vec{V}|\sin(\vec{U},\vec{V}) = \sqrt{10}\sqrt{5}\,\sin\varphi$$

On sait que $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$|\vec{W}| = \sqrt{50}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5x\sqrt{2}x\sqrt{2}}{2} = 5$ **(0.5 pts)**

3- Le produit mixte :

$(\vec{U}\wedge\vec{V}).\vec{W} = 25$ **(0.25 pts)** Ce produit représente le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs. **(0.25 pts)**

B. **(1.5 pts)**

a) $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ est valide et le résultat est un réel.

b) $\vec{A}\wedge(\vec{B}.\vec{C})$ est non valide car le produit vectoriel ne peut pas être entre un scalaire et un vecteur.

c) $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$ est valide et le résultat est un vecteur.

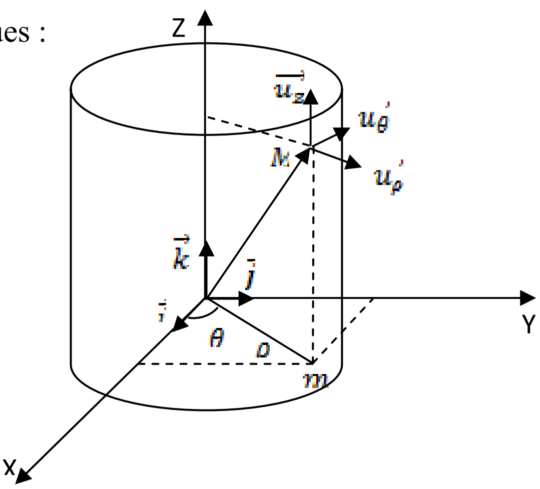
d) $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$ est valide et le résultat est un vecteur.

e) $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{B})$ est valide et le résultat est un vecteur.

f) $(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{C})$ est valide mais le résultat est nul.

<u>Exercice 3</u>: (8 pts)

1- Le vecteur position en coordonnées cylindriques :



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$
$$\overrightarrow{Om} = \rho\cos\theta\vec{\imath} + \rho\cos\theta\vec{\jmath} = \rho\overrightarrow{u_\rho} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$
$$\overrightarrow{mM} = z\vec{k} = z\overrightarrow{u_z} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$
$$\overrightarrow{OM} = \rho(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) + z\vec{k}$$

Donc $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$ **(0.5 pts)**

Ou bien

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (1) **(0.25pts)**

Par projection : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ et $z = Z_m$ **(0.75pts)** **(01pts)**

Par projection $\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_z} = \vec{k} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$ **(0.75pts)**

$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (2)

Donc par identification (1) et (2) $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$ **(0.25pts)**

2- vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{u_\rho} + dz\vec{u_z})$ **(0.5pts)**

$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} + z\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}$ **(0.25pts)**

$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$ **(0.25pts)**

$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$**(0.5pts)**

3- vecteur de déplacement élémentaire : la méthode de différentiation du vecteur unitaire :

$\overrightarrow{dOM} = d(\rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}) = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\overrightarrow{u_\rho} + dz\overrightarrow{u_z} + zd\overrightarrow{u_z}$ **(0.5pts)**

$\overrightarrow{dOM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\overrightarrow{u_\rho}\frac{d\theta}{d\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$ on a $\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}d\theta = d\theta.\overrightarrow{u_\theta}$ **(0.5pts)**

$\overrightarrow{dOM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$**(0.5pts)**

4- Le volume élémentaire:

$dV = d\rho\ \rho d\theta\ dz$ **(01pts)**

Le volume d'un cylindre sera: $V = \iiint dV = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz$

Donc $V = \pi R^2 H$ **(01pts)**