Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Epreuve de contrôle.
Jeudi 16/11/2017 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (07pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) \qquad |x^2-1|+|x+2|=|x-3|.$$

Exercice 2: (08pts) On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{2u_n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. Montrer ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u_{n+1}-u_n)(u_n-u_{n-1}) \geq 0$.
3. En déduire que cette suite est décroissante.
4. Est-elle convergente ? (Pourquoi) Si oui, calculer sa limite.

Exercice 3: (05pts) Soient a et b deux réels fixés. Montrer que

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$$

En déduire une formule analogue pour $\max\{a,b,c\}$.

Première Année M.I – Semestre 1 - (2017/2018)

Module : "Analyse 1" – Epreuve de Contrôle - Corrigé

Exercice 1 : (07pts) (E) : $|x^2-1| + |x+2| = |x-3|$ 0,5

On a : $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2-1 \geq 0 \\ -x^2+1 & \text{si } x^2-1 \leq 0 \end{cases}$; $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -x-2 & \text{si } x+2 \leq 0 \end{cases}$ 0,5 0,5

et $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{si } x+3 \leq 0 \end{cases}$

Récapitulons tout dans le tableau suivant :

x	$-\infty$ -2	-2 -1	-1 1	1 3	3 $+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert =$	x^2-1	x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1	x^2-1
$\lvert x+2\rvert =$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-3\rvert =$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
(E)	$x^2-6=0$	$x^2+2x-2=0$	$x^2-2x=0$	$x^2+2x-2=0$	$x^2+4=0$

1

Ainsi il y a 4 équations du second degré à résoudre dans les intervalles respectifs.

1^er^ cas : $x \in]-\infty,-2]$; $x^2-6=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$ or $+\sqrt{6} \notin]-\infty,-2]$
mais $-\sqrt{6} < -2$ donc $\boxed{S_1 = \{-\sqrt{6}\}}$ 1

2^ème^ cas : $x \in [-2,-1]$; $x^2+2x-2=0$, $\Delta' = 1+2 = 3$
ou $x \in [1,3]$ $\quad x_1 = -1-\sqrt{3}$, $x_2 = -1+\sqrt{3}$

Or : $x_2 > -1$ (évident) et $x_2 < 1$ car $\sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow -1+\sqrt{3} < 1$. 1
$x_1 < -2$ car $1-\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{3} < -2$. Donc $\boxed{S_2 = \emptyset}$

3^ème^ cas : $x \in [-1,1]$; $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$
Or $2 \notin [-1,1]$ et $0 \in [-1,1]$ donc $\boxed{S_3 = \{0\}}$ 1

4^ème^ cas : $x \in [3,+\infty[$, $x^2+4=0$ n'a pas de solution, $\boxed{S_4 = \emptyset}$ 1

En définitive

$$\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{-\sqrt{6}, 0\}}$$ 0,5

Exercice 2 : (08 pts) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{2u_n+3}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1°/ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. On le fait par récurrence.

* $u_0 = 1 > 0$ par définition.
* Supposons $u_n > 0$, alors $u_n+1 > 1$ et $2u_n+3 > 3$

donc $u_{n+1} > 0$ car fraction de deux nombres > 0. 1pt

2°/ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1}) \geq 0$.

On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+1}{2u_n+3} - \dfrac{u_{n-1}+1}{2u_{n-1}+3}$ 2pts

$$= \frac{u_n - u_{n-1}}{(2u_n+3)(2u_{n-1}+3)}$$

donc $(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1}) = \dfrac{(u_n - u_{n-1})^2}{(2u_n+3)(2u_{n-1}+3)} \geq 0$

car le numérateur est positif (un carré), et le dénominateur aussi d'après la première question.

3°/ (u_n) est décroissante : D'après la deuxième question, $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_n - u_{n-1}$, puisque leur produit est positif. Donc par récurrence rétrograde, $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_1 - u_0$. Calculons ce dernier : 1pt

$$u_1 - u_0 = \frac{1+1}{2+3} - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -3/5 < 0.$$ Donc

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc (u_n) est décroissante. 2pts

4°/ Convergence : (u_n) est décroissante, minorée par 0 par exemple) donc elle est convergente. Sa limite vérifie l'équation

$\ell = \dfrac{\ell+1}{2\ell+3} \iff \ell(2\ell+3) - \ell - 1 = 0 \iff 2\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$ 2pts

$\Delta' = 1 + 2 = 3 \implies \ell_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < 0,\ \ell_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} > 0 \implies \boxed{\ell = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}}$

Exercice 3 : (05 pts)

1°/ $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$

On a deux cas

* $\max\{a,b\} = a$ càd $b \leq a$. D'où $|a-b| = a-b$

donc $\dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \dfrac{a+b+a-b}{2} = a.$ 1pt

donc l'égalité est vraie.

* $\max\{a,b\} = b$ càd $a \leq b$. D'où $|a-b| = b-a$ 1pt

donc $\dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \dfrac{a+b-a+b}{2} = b$

et donc l'égalité est vraie aussi.

2°/ Il est clair que $\max\{a,b,c\} = \max\{\{a,b\},c\}$

D'où

$$\max\{a,b,c\} = \dfrac{\dfrac{a+b+|a-b|}{2} + c + \dfrac{|a+b-2c+|a-b||}{2}}{2}$$ 3pts

$$\boxed{\max\{a,b,c\} = \dfrac{1}{4}\left[a+b+2c+|a-b| + \big|a+b-2c+|a-b|\big|\right]}$$