Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2016/2017*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Master Biomathématiques et Modélisation

Final : Méthodes de Réduction

22 janvier 2017

Exercice 1: **4 pts**

A) Soit (C_ε) un problème de Cauchy donné, initialisé au temps $t = 0$.

° Pour qu'une approximation $O(\varepsilon)$ de la solution de (C_ε) soit valable pour tous les temps positifs, il faut que le problème réduit (C_0) admette un équilibre exponentiellement stable. Vrai ou faux? Justifier.

° Si la solution du problème réduit (C_0) est bornée, l'approximation $O(\varepsilon)$ est vraie pour tout $t > 0$. Vrai ou faux? Justifier.

B) Enoncer clairement un théorème de perturbation régulière.

Exercice 2: **8 pts**

On considère le simple problème de Cauchy suivant, où ε est un petit paramètre réel positif,

$$(E_\varepsilon) \quad \dot{x} = -\varepsilon x^2, \ \ x(0) = 1.$$

$1/$ Justifier l'existence d'approximations uniformes (sans les calculer) sur un un intervalle de temps borné de l'ordre ε^N pour tout N de la solution $x(t,\varepsilon)$ de (E_ε) sans résoudre ce problème de Cauchy.

$2/$ Toujours sans résoudre le problème (E_ε), pouvez-vous affirmer que les approximations sont valables sur un intervalle de temps non borné?

$3/$ Trouver explicitement l'approximation $O(\varepsilon^2)$ et la comparer à la solution exacte de (E_ε). Dire sur quel type d'intervalle cette approximation a lieu.

$4/$ Peut-on traiter de la même manière le problème

$$(F_\varepsilon) \quad \dot{x} = -\sqrt{\varepsilon}\, x^2, \ \ x(0) = 1 \ \ ?$$

Montrer que la solution exacte admet un développement d'ordre quelconque en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ sur un intervalle de temps à préciser. Quelle types d'approximations aurait-on pu obtenir alors?

Exercice 3 : **8 pts**

Soit le problème singulièrement perturbé

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{array}{l} \varepsilon\dot{x} = -x + y^3, \quad x(0) = \alpha \\ \dot{y} = x - y + \varepsilon xy, \ y(0) = \beta. \end{array} \quad 0 < \varepsilon << 1.$$

On suppose que les conditions initiales ne dépendent pas de ε. Etablir avec soin l'équation de la couche limite et les problèmes réduits éventuels de (P_ε). Appliquer si possible le théorème de convergence de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides en en vérifiant toutes les hypothèses et donner les approximations de la solution du problème sur le plus grand intervalle de temps positif possible. Donner une esquisse soignée des trajectoires dans le plan de phase (x,y).

Je croyais qu'un savant était toujours un homme qui cherche une vérité, alors que c'est souvent un homme qui vise une place.

Jean Rostand (1894-1977), Carnet d'un biologiste

Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2016/2017*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Master Biomathématiques et Modélisation

Final : Méthodes de Réduction

22 janvier 2017

Exercice 1: **4 pts**

A) Soit (C_ε) un problème de Cauchy donné, initialisé au temps $t = 0$.

° Pour qu'une approximation $O(\varepsilon)$ de la solution de (C_ε) soit valable pour tous les temps positifs, il faut que le problème réduit (C_0) admette un équilibre exponentiellement stable. Vrai ou faux? Justifier.

° Si la solution du problème réduit (C_0) est bornée, l'approximation $O(\varepsilon)$ est vraie pour tout $t > 0$. Vrai ou faux? Justifier.

B) Enoncer clairement un théorème de perturbation régulière.

REP.

A) ° Faux. C'est une condition suffisante (voir cours) Noter que l'existence d'un équilibre exponentiellement stable avec la condition initiale dans son bassin d'attraction implique systématiquement que la solution est globale.

° Faux. Voir l'exemple de l'exercice 2 ci-dessous! Autre exemple (vu en cours) : le problème réduit du problème régulièrement peturbé $\ddot{x} + (1+\varepsilon)^2 x = 0;\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ est donné par $\ddot{x} + x = 0;\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ de solution BORNEE (donc globale) $x_0(t) = \sin t$ pour tout $t \geq 0$. Cependant, sachant que la solution du problème perturbé est $x(t,\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon}\sin(1+\varepsilon t)$ pour tout $t \geq 0$, l'écart $|x(t,\varepsilon) - x_0(t)|$ augmente considérablement quand t est de l'ordre de $2\pi/\varepsilon$.

B) (Voir cours) Par exemple, le théorème de dépendance continue des solutions par rapport aux paramètres et/ou aux conditions initiales.

Exercice 2: **8 pts**

On considère le simple problème de Cauchy suivant, où ε est un petit paramètre réel positif,

$$(E_\varepsilon)\quad \dot{x} = -\varepsilon x^2,\ \ x(0) = 1.$$

1/ Justifier l'existence d'approximations uniformes (sans les calculer) sur un un intervalle de temps borné de l'ordre ε^N pour tout N de la solution $x(t,\varepsilon)$ de (E_ε) sans résoudre ce problème de Cauchy.

2/ Toujours sans résoudre le problème (E_ε), pouvez-vous affirmer que les approximations sont valables sur un intervalle de temps non borné?

3/ Trouver explicitement l'approximation $O(\varepsilon^2)$ et la comparer à la solution exacte de (E_ε). Dire sur quel type d'intervalle cette approximation a lieu.

4/ Peut-on traiter de la même manière le problème

$$(F_\varepsilon)\quad \dot{x} = -\sqrt{\varepsilon}\,x^2,\ \ x(0) = 1\ \ ?$$

Montrer que la solution exacte admet un développement d'ordre quelconque en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ sur un intervalle de temps à préciser. Quelle types d'approximations aurait-on pu obtenir alors?

REP.

1/ Posons $f(x,\varepsilon) = -\varepsilon x^2$. Le champ f est de classe C^N par rapport à tous ses arguments, pour tout N; la condition initiale étant constante, est aussi régulière par rapport au paramètre ε; le problème réduit $\dot{x} = 0,\ x(0) = 1$ admet une solution unique définie sur un intervalle (ici arbitraire) $[0,T]$. Alors, d'après le théorème de perturbation, pour ε assez petit, il existe des fonctions $x_k(t)$ continues, $k = 0,..,N-1$, telles que (E_ε) admet une solution unique $x(t,\varepsilon)$ définie au moins sur $[0,T]$ vérifiant
$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)\varepsilon^k + O(\varepsilon^N)$ l'approximation étant uniforme sur $[0,T]$.

2/ La version du théorème de perturbation assurant que ces approximations sont valables pour tout $t \geq 0$ donne un condition **suffisante** qui est que la solution du problème réduit est globale et que l'équation $\dot{x} = 0$ admet un équilibre exponentiellement stable. La solution $x_0(t) \equiv 1$ est bien définie pour tout t mais l'équation non perturbée n'a pas d'équilibre exponentiellement stable (ici, tous les points de l'axe réel forment un continuum de points d'équilibre). On ne peux donc pas affirmer (ni infirmer!) que ces approximations sont vraies sur un intervalle de temps non borné.

3/ On cherche donc la solution de (E_ε) sous la forme $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + x_1(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. En substituant cette expression dans l'équation (E_ε) et en identifiant les coefficients des puissances de ε, on trouve les deux problèmes d'approximation $O(\varepsilon)$ et $O(\varepsilon^2)$

$$(P_0),\ \ \dot{x}_0 = 0,\ x_0(0) = 1,$$
$$(P_1),\ \ \dot{x}_1 = -1,\ x_1(0) = 0,$$

de solutions respectives $x_0(t) \equiv 1$ et $x_1(t) = -t$. D'où l'approximation uniforme sur un intervalle $[0,T]$ (à déterminer)

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= x_0(t) + x_1(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 - t\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

D'autre part, le problème perturbé dans ce cas se résoud par séparation des variables et a pour solution

$$x(t,\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon t},\ t \geq 0.$$

L'approximation est bien valide pour des temps $t \in [0,T]$ (voir que l'expression polynomiale de l'approximation n'est autre que le développement limité de la solution exacte au voisinage de $\varepsilon = 0$) pourvu que T ne soit pas de l'ordre de $1/\varepsilon$. En effet, $\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = x_0(t)$ et cette convergence n'est uniforme que sur des intervalles de temps où $t \neq O(1/\varepsilon)$.

4/ Dans le cas du problème (F_ε), le champ n'est pas régulier en ε. On ne peut appliquer le théorème de perturbation (On pourrait adapter cependant un théorème de même type dans ce cas). La solution exacte est donnée par

$$x(t,\varepsilon) = \frac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}\,t},\ t \geq 0.$$

Elle admet en évidence, pour $\varepsilon \to 0$, le développement suivant

$$x(t,\varepsilon) = 1 - \sqrt{\varepsilon}\,t + (\sqrt{\varepsilon}\,t)^2 - (\sqrt{\varepsilon}\,t)^3 +..+(-1)^{N-1}(\sqrt{\varepsilon}\,t)^{N-1} + O((\sqrt{\varepsilon})^N),\ t \geq 0.$$

On voit que si $T \neq O(1/\sqrt{\varepsilon})$, la partie régulière est une approximation uniforme $O((\sqrt{\varepsilon})^N)$ sur $[0,T]$.

Exercice 3 : **8 pts**

Soit le problème singulièrement perturbé

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{array}{l} \varepsilon\dot{x} = -x + y^3, \quad x(0) = \alpha \\ \dot{y} = x - y + \varepsilon xy,\ y(0) = \beta. \end{array} \quad 0 < \varepsilon << 1.$$

On suppose que les conditions initiales ne dépendent pas de ε. Etablir avec soin l'équation de la couche limite et les problèmes réduits éventuels de (P_ε). Appliquer si possible le théorème de convergence de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides en en vérifiant toutes les hypothèses et donner les approximations de la solution du problème sur le plus grand intervalle de temps positif possible. Donner une esquisse soignée des trajectoires dans le plan de phase (x,y).

REP.

Notons d'abord qu'il est evident que les propriétés d'existence et d'unicité sont vérifiées aussi bien pour le système singulièrement perturbé que pour les équations de comparaisons (ER) et (EL) que nous allons définir. Soit $\tau = 1/t$ et $(') = d./d\tau$.

Equation rapide (ER) $\quad x' = -x + y^3$, y paramètre,

La variété lente, lieu des points d'équilibre de (ER) lorsque y varie, est donnée par $x = h(y) := y^3$. Elle est évidemment isolée. Comme $d(-x+y^3)/dx = -1$, la variété est -globalement) attractive, avec bassin d'attraction uniforme pour tout y dans un compact arbitraire K de la droite réelle.

Equation lente (EL) $\dot{y} = y^3 - y,\ y \in \mathring{K}$.

On se réfère à l'équation de la couche limite (ECL) et au problème réduit (PR)

$$(ECL)\quad x' = -x + \beta^3,\ x(0) = \alpha,$$
$$\dot{y} = y^3 - y,\ y(0) = \beta,\ y \in \mathring{K},$$

de solutions respectives notées $\tilde{x}(\tau)$ définies pour tout $\tau \geq 0$ et $\bar{y}(t)$.

Si $T > 0$ est dans l'intervalle d'existence de $\bar{y}$, pour $\beta \in \mathring{K}$ et pour tout α, le théorème de convergence Tikhonov pour les systèmes lents-rapides affirme que la solution $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon))$ de (P_ε) est définie au moins sur $[0,T]$ et vérifie :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(\varepsilon\tau,\varepsilon) = \tilde{x}(\tau),\ \text{pour tout } \tau \geq 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = h(\bar{y}(t)) \ = \bar{y}(t)^3,\ \text{pour tout } t \in]0,T],$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t),\ \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Pour examiner l'extension de ses limites à tous les temps, il suffit que β soit dans le bassin d'attraction d'un équilibre asymptotiquement stable de l'équation réduite (ER). L'étude du signe de $y^3 - y$ montre qu'il existe trois équilibres -1, 0 et $+1$ parli lesquel seule l'origine est attractive. Ainsi, pour pouvoir appliquer le théorème de Tikhonov sur un intrevalle de temps non borné, il suffit de choisir l'intervalle compact K inclus dans $]-1,1[$, contenant 0 et β.

La résolution par quadratures de (ECL) et (PR) donne :

$$\tilde{x}(\tau) = \beta^3 + (\alpha - \beta^3)e^{-\tau},$$
$$\bar{y}^2(t) = \beta^2/(\beta^2 - (\beta^2 - 1)e^{2t}).$$

Bon site à consulter : http://maddmaths.smai.emath.fr/

Citation : " *Nous n'héritons pas le terre de nos parents, nous l'empruntons à nos enfants* "

Leopold Senghor