Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3e Année Licence – S6 Juin 2017

Equations aux Dérivées Partielles Examen Final 1H45

***Exercice 1(8pts)**: Soit $u(x,t)$ la solution du problème suivant :*

$$(\mathcal{W})\ \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0; & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x); & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $g \in C^2(\mathbb{R})$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$.

1. a. En posant $r = x - t$ et $s = x + t$, montrer que l'équation du problème $(\mathcal{W})$ est équivalente à l'équation $u_{rs} = 0$ où u_{rs} désigne $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s}$.

b. Résoudre l'équation $u_{rs} = 0$ et établir la formule de d'Alembert,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x-t) + g(x+t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

2. On suppose que les fonctions g et h sont à support compact.

On définit l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par,

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\,dx, \qquad p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)\,dx.$$

a. Montrer que la somme $k + p$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que, $k(t) = p(t) \quad \forall t > T$.

***Exercice 2(8pts)**: On considère le problème suivant :*

$$(\mathcal{H})\begin{cases} u_t = u_{xx}; & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. *Déterminer une fonction $u_0(x)$ indépendante de t solution de $(\mathcal{H})$.*
2. *On pose $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$.*
   Montrer que $v(x,t)$ est alors solution du problème auxiliaire suivant :
   $$(\mathcal{H}_0)\begin{cases} v_t = v_{xx}; & 0 < x < 1, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ v(x,0) = x - 1; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$
3. *Résoudre le problème $(\mathcal{H}_0)$ et en déduire $u(x,t)$ solution de $(\mathcal{H})$.*

***Exercice 3(4pts)**: Soit u une fonction régulière solution de l'équation de la chaleur,*

$$u_t - \Delta u = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[.$$

1. *Montrer que, $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ est aussi solution de l'équation de la chaleur pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *En utilisant ce qui précède, montrer que $v(x,t) = x.\nabla u(x,t) + 2t u_t(x,t)$ résout également l'équation de la chaleur.*

Bon Courage

Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3^e Année Licence – S6 Juin 2017

Equations aux Dérivées Partielles Examen Final 1H45

Corrigé

Exercice 1(8pts): *$u(x,t)$ est la solution du problème suivant :*

$$(\mathcal{W}) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0; & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0\ ) = g(x), \quad u_t(x,0\ ) = h(x); & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $g \in C^2(\mathbb{R})$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$.

1. a. **(2 pts)** *En notant* $\square u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u$, *l'équation s'écrit* $\square u = 0$.

On factorise l'opérateur de d'Alembert $\square$ comme suit

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u.$$

Posons $r = x - t$ et $s = x + t$, alors

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(-2\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(2\ \frac{\partial}{\partial s}\right) = -4\frac{\partial^2}{\partial r \partial s}$$

et $\square u = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0.$

Remarque : Autre manière de faire, voir votre cours.

b. **(2 pts)** *Résolvons l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = c(s) \Longrightarrow u = \varphi(s) + \psi(r).$$

Ici $c(s)$ est une constante par rapport à r dépendant de s et $\varphi(s)$ est une primitive de $c(s)$ et enfin $\psi(r)$ est la constante d'intégration (par rapport à s) dépendent de r.

Ainsi $u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$.

→ *On a* $u(x,0\ ) = g(x)$ *d'où* $\varphi(x) + \psi(x) = g(x)$, (1)

et $u_t(x,0\ ) = h(x) \Longrightarrow \varphi'(x) - \psi'(x) = h(x)$, (2)

par intégration entre x_0 et x des deux membres de la deuxième équation, on trouve

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} h(y)\, y + K, \quad \big(K = K(\,x_0)\big).$$

De (1) *et cette dernière équation on aboutit à*

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} h(y)dy + \frac{K}{2} \\ \psi(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} h(y)dy - \frac{K}{2}. \end{cases}$$

Finalement, en remplaçant dans l'expression de $u(x,t)$ *on trouve*

$$\textbf{(2 pts)}\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x-t) + g(x+t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy, \qquad (x \in \mathbb{R},\ \ t \geq 0).$$

2. *Les fonctions g et h sont supposées à support compact.*

On pose

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2\,(x,t\,)dx, \qquad p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,(x,t\,)dx.$$

a. $\textbf{(1,5 pt)}$ *Montrons que la somme* $k + p$ *est constante sur* $\mathbb{R}^+$.
Il suffit de vérifier que $(k+p)\,'(t) = 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.
On a

$$k\,'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t\,)u_{tt}(x,t\,)\, dx, \ \ car\ \ \frac{\partial u_t^2}{\partial t} = 2u_t\, u_{tt},$$

$$p'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{tx}(x,t\,)u_x(x,t\,)\, dx, \ \ car\ \ \frac{\partial u_x^2}{\partial t} = 2u_x\, u_{tx}.$$

Une intégration par parties nous donne

$$p'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} . \frac{\partial u}{\partial x} dx = \left[\frac{\partial u}{\partial t} . \frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx} dx,$$

Car d'après la formule de d'Alembert, $\frac{\partial u}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *se laissent s'exprimer en fonction de g' et h qui sont à support compact donc s'annulent à l'infini.*

Maintenant

$$k\,'(t) +\ p'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t u_{tt} - u_t u_{xx}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{tt} - u_{xx}) u_t dx = 0,$$

car $u_{tt} - u_{xx} = 0$. *Ceci prouve que la fonction* $k + p$ *est constante sur* $\mathbb{R}^+$.

b. **(1,5 pt)** *Montrons qu'il existe* $T > 0$ *tel que,* $k(t) = p(t) \quad \forall t > T$.

Ecrivons la différence $k(t) - p(t)$ *en utilisant la formule de d'Alembert :*

$$k(t) - p(t) = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} ([g'(x+t) - g'(x-t) + h(x+t) + h(x-t)]^2 - [g'(x+t) + g'(x-t) + h(x+t) - h(x-t)]^2)dx.$$

Les fonctions g, g' et h sont à support compact, donc ;

$$\exists A > 0, \forall y, \qquad |y| > A \Longrightarrow \quad g(y) = g'(y) = h(y) = 0,$$

et par suite pour $t > T \gg A$, *on obtient* $k(t) - p(t) = 0$, *ainsi k et p s'égalisent pour t assez grand.*

Exercice 2(8pts): *Soit le problème :*

$$(\mathcal{H})\begin{cases} u_t = u_{xx}; & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. **(2 pts)** *Déterminons une fonction* $u_0(x)$ *indépendante de t solution de* $(\mathcal{H})$.
   u_0 *étant indépendante de t, donc* $(u_0)_t = 0$. *En portant dans l'équation on trouve ;* $(u_0)_{xx} = u_0'' = 0$, *d'où* $u_0(x) = ax + b$.
   Cette solution doit satisfaire les conditions au bord : $u_0(0) = 1, u_0(1) = 0$.

   On trouve $u_0(x) = 1 - x$.

2. **(2 pts)** $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$.
   Montrons que $v(x,t)$ *est solution du problème* $(\mathcal{H}_0)$:
$$(\mathcal{H}_0)\begin{cases} v_t = v_{xx}; & 0 < x < 1, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ v(x,0) = x - 1; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$
On a: $v_t = u_t - (u_0)_t = u_t = u_{xx} = u_{xx} - (u_0)_{xx}$, *car* $(u_0)_{xx} = 0$
d'où $v_t = v_{xx}$ *pour* $0 < x < 1$.
$v(0,t) = u(0,t) - u_0(0) = 1 - 1 = 0, \quad v(1,t) = u(1,t) - u_0(1) = 0 - 0 = 0,$
$v(x,0) = u(x,0) - u_0(x) = 0 - (1-x) = x - 1.$
Ainsi $v(x,t)$ *est solution de* $(\mathcal{H}_0)$.

3. **(3 pts)** *Résolvons* $(\mathcal{H}_0)$.
   Par la méthode de séparation des variables, posons $v(x,t) = X(x)T(t)$.
   En portant dans l'équation, on obtient
$$XT' = X''T \quad d'où \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}$$
   Les variables x et t sont indépendantes on écrit alors
$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T'}{T}, \quad \lambda \text{ cste réelle.}$$

D'où $X'' - \lambda X = 0,$ *et* $T' - \lambda T = 0.$

Résolvons l'équation en x: *Si* $\lambda \geq 0$, *on obtient la solution triviale.*

Pour $\lambda < 0$, *disons* $\lambda = -\alpha^2$, $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$, *alors* $X(x) = A\cos \alpha x + B \sin \alpha x.$

On a $X(0) = 0$ *d'où* $A = 0$, *et* $X(1) = 0$ *implique* $B = 0$ *ou* $\sin \alpha = 0.$

Nous cherchons les solutions non triviales écartons alors l'éventualité $B = 0.$

$$\sin \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a une famille de solutions: $X_n(x) = B_n \sin(n\pi x).$

Résolvons l'équation en t, *pour* $\lambda = -\alpha^2 = -n^2\pi^2$.

Un simple calcul donne la famille de solutions suivante : $T_n(t) = D_n e^{-n^2\pi^2 t}$.

Une famille de solutions de l'équation de départ est :

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x), \qquad (\text{où } C_n = B_n D_n)$$

Par le principe de superposition on obtient la solution de $(\mathcal{H}_0)$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x),$$

de la condition initiale on a

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\pi x) = x - 1,$$

et par suite

$$C_n = 2\int_0^1 (x-1)\sin(n\pi x)dx = -\frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement

$$v(x,t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x),$$

et

(1 *pt*) $u(x,t) = u_0(x) + v(x,t) = 1 - x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x).$

***Exercice 3(4pts)*:** *u étant une fonction régulière solution de l'équation de la chaleur,*

$$u_t - \Delta u = 0 \;\; dans \;\; \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[.$$

1. **(2 pts)** *Montrons que,* $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ *est solution de l'équation de la chaleur pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On a $(u_\lambda)_t(x, t) = \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)$
   et $(u_\lambda)_{x_i}(x, t) = \lambda u_{x_i}(\lambda x, \lambda^2 t)$ *d'où* $(u_\lambda)_{x_i x_i}(x, t) = \lambda^2 u_{x_i x_i}(\lambda x, \lambda^2 t)$
   ainsi
$$\Delta u_\lambda(x,t) = \sum_{i=1}^{n} (u_\lambda)_{x_i x_i}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 u_{x_i x_i}(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)$$
   et par suite
   $(u_\lambda)_t(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) = \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^2 (u_t - \Delta u) = 0.$
   Donc u_λ *est solution de l'équation de la chaleur pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. **(2 pts)** *Montrons maintenant que* $v(x, t) = x.\nabla u(x, t) + 2t u_t(x, t)$ *résout également l'équation de la chaleur.*
   La fonction u étant régulière, il en est de même pour u_λ*, elle régulière par rapport à ses trois arguments,* x*,* t *et* λ.
   Dérivons u_λ *par rapport à* λ *, nous obtenons*
$$\frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda(x,t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t) = x.\nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$
   en prenant $\lambda = 1$*, nous obtenons* $v(x, t)$*, c.-à-d.* $v(x, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda(x,t)\Big|_{\lambda=1}$.
   Nous avons déjà montré que
$$\frac{\partial}{\partial t} u_\lambda - \Delta u_\lambda = 0.$$
   Dérivons les deux membre par rapport à λ *, alors*
$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} u_\lambda - \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta u_\lambda = 0,$$
   la fonction u_λ *est régulière, donc ses dérivées partielles mixtes sont égales et nous pouvons échanger l'ordre des dérivées et par suite*
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda\right) - \Delta\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda\right) = 0,$$
   et $\frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda$ *résout l'équation de la chaleur, et en particulier pour* $\lambda = 1$ *qui correspond à* $v(x, t)$.