Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
Master 1: EDP et applications

Le 01/06/2017

EXAMEN: Théorie spectrale des opérateurs

Exercice 1: (04 points)

Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur linéaire défini sur un espace vectoriel $D(A) \subset H$ à valeurs dans H. On suppose que $D(A)$ est dense dans H.

Montrer que si A est symétrique tel que $Im(A+i) = H$ alors A est auto-adjoint.

Exercice 2: (05 points)

Soit H un espace de Hilbert complexe, $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible tel que $\|A\| \leq 1$ et $\left\|A^{-1}\right\| \leq 1$.

Montrer que $\sigma(A) \subset B$ où $B = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\lambda| = 1\}$ et que A est unitaire.

Exercice 3: (05 points)

Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal.

1/ Montrer que $KerA = KerA^*$.

2/ montrer que A est inversible si et seulement si il existe une constante $C > 0$ tel que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ pour tout $x \in H$.

Exercice 4:(06 points)

Soit E=C($[0,1]$) , espace de Banach à valeurs complexes, continues sur $[0,1]$, muni de la norme unifome.

$T : E \to E$, défini par $Tf(x) = \int\limits_0^1 e^{x+t} f(t)\, dt$

1/ montrer que T est un opérateur compact sur E.

2/ Déterminer $\|T\|$ et $\sigma(T)$.