Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2016/2017.
Mai 2017.
Eléments finis. (Master1-S2)
(Master EDP&Appli.)

Epreuve de contrôle

(durée : 02 heures)

Dans toute la suite Ω est un ouvert borné connexe régulier (de frontière Γ $\mathcal{C}$ par morceaux) de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que si f et $g \in L^2(\Omega)$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$. (0.5pt)

2) $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ étant une suite numérique t.q. $\lim\limits_{n\infty} |x_n| = \ell$

a) Montrer que si $\ell = 0$ alors $\lim\limits_{n\infty} x_n = 0$ (0.5pt)

b) Montrer que si $\ell \neq 0$ alors $\{x_n\}_{n\geq 1}$ peut, en général, ne pas converger

<u>Indication</u>: Ici, on peut préciser un contre-exemple (0.5pt)

3) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ étant une suite convergente ds $L^1(\Omega)$ t.q. $\lim\limits_{n\infty} f_n = f$ ds $L^1(\Omega)$, utiliser alors 2.a) et le thm ci-dessous pour montrer qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ds $L^1(\Omega)$ t.q. $\lim\limits_{k\infty} \int_\Omega f_{n_k}(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega \lim\limits_{k\infty} f_{n_k}(x)\,dx$ (2pts)

<u>Rappel du thm</u>: Soient $\{h_n\}_{n\geq 1}$ une suite convergente dans $L^p(\Omega)$ $(p\geq 1)$ t.q. $\lim\limits_{n\infty} h_n = h$ ds $L^p(\Omega)$

Alors, il existe une s/suite extraite $\{h_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{h_n\}_{n\geq 1}$ ds $L^p(\Omega)$ t.q. :

$\lim\limits_{k\infty} h_{n_k}(x) = h(x)$ p.p. sur Ω

4) Considérant la suite convergente $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset L^2(\Omega)$ t.q. $\lim\limits_{m\infty} u_m = u$ ds $L^2(\Omega)$ et $v_p \in L^2(\Omega)$ $\forall p \geq 1$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, montrer alors que :

a) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{m\infty} u_m v_p = u v_p$ dans $L^1(\Omega)$ (0,5pt)

b) $\exists$ une s/suite $\{u_{m_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{u_m\}_{m\geq 1}$ dans $L^2(\Omega)$ t.q. $\forall p \geq 1$ $(p \in \mathbb{N}^*)$:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{m_k} v_p\,dx = \int_\Omega u v_p\,dx = \int_\Omega \Big(\lim_{k\infty} u_{m_k}(x)\Big) v_p(x)\,dx \quad (1pt)$$

5) A partir d'un exemple simple, montrer que si $u \in H_0^1(\Omega)$ (c.à d. $u \in H^1(\Omega)$ t.q. $u|_\Gamma = 0$) alors cela n'entraîne pas forcément que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ. (1pt)

6) Soient a, b et c trois réels distincts t.q. $a < c < b$ et soit $v \in \mathcal{C}([a,b])$ telle que : $v|_{]a,c[} \in H^1(]a,c[)$ et $v|_{]c,b[} \in H^1(]c,b[)$. Alors :

a) montrer que $v \in L^2(]a,b[)$ par le calcul intégral. (1pt)

b) Soit Dv une fction définie sur $]a,b[$ t.q. $Dv|_{]a,c[} = v'|_{]a,c[}$ et $Dv|_{]c,b[} = v'|_{]c,b[}$ (Ici, on note par v' la dérivée au sens des distributions de v sur $]a,b[$).

Montrer alors que $Dv \in L^2(]a,b[)$. (1pt)

c) Montrer que Dv n'est autre que la dérivée au sens des distributions (notée v') de v sur $]a,b[$ et déduire que $v \in H^1(]a,b[)$. (2pts)

7) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. (0.5pt)

8) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ $a + b \leq \sqrt{2}\,(a^2 + b^2)^{1/2}$ (1pt)

<u>Indications</u>: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(a-b)^2 \geq 0$ et $(a+b)^2 \geq 0$

9) Dans $H^1(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, montr. que la norme de sommation $\|\cdot\|_{S,H^1}$ définie par : (1.5pts)

$v\in H^1(\Omega)$ $\|v\|_{S,H^1(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$

c.à d. déterminer deux constantes positives C_1 et C_2 t.q. $\forall v\in H^1(\Omega)$:

$C_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{S,H^1(\Omega)} \leq C_2\|v\|_{H^1(\Omega)}$. Rappel: $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$

10) V étant un $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert, somme hilbertienne des sous/espaces fermés E_n $(n\geq 1)$ de V : $V = E_1\oplus E_2\oplus\cdots = \bigoplus_{n\geq 1} E_n$ avec $E_i\perp E_j$ si $i\neq j$ c.à d. $\forall x\in E_i$ $\forall y\in E_j$ $\langle x,y\rangle_V = 0$ si $i\neq j$, on note par V_0 l'esp. vect. engendré par ttes les combinaisons linéaires finies des éléments des E_n $(n\geq 1)$:

$$V_0 = \{x\in V/\exists m\in\mathbb{N}^* \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i,\ \alpha_i\in\mathbb{R}\ (i=\overline{1,m}) \text{ et } x_i\in E_i\ (i=\overline{1,m})\}.$$

On note aussi par $S_k = \sum_{j=1}^{k}\Pi_j$ où Π_j $(j=\overline{1,k})$ est l'opérateur de proj. orthogonale sur E_j $(j=\overline{1,k})$ c.à d. si $y\in V$ alors $S_k y = \sum_{j=1}^{k}\Pi_j y$ où $\Pi_j y$ $(j=\overline{1,k})$ est la proj. orthogonale de y sur E_j $(\forall j=\overline{1,k}\ \Pi_j y\in E_j)$. (3pts)

Soit $\bar{u}\in V_0$, montrer alors que, pour k entier naturel assez grand, $S_k\bar{u} = \bar{u}$

Rappel important : $y\in V$ et $\Pi_j y$ est sa projection orthogonale sur le s/esp. fermé E_j alors cette projection est unique et elle est caractérisée par la propriété suivante : $\langle y-\Pi_j y, v\rangle_V = 0$ $\forall v\in E_j$

11) V étant un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert et $\{V_m\}_{m\geq 1}$ une suite croissante de sous/espaces fermés de dimensions finies ($\dim V_m = m$) c.à d. $V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_m\subset\cdots\subset\bigcup_{m\geq 1} V_m\subset V$, on considère alors le P.V.G.: Trouver $u\in V$ t.q. $a(u,v) = L(v)$ $\forall v\in V$ où a est 1 forme bilinéaire continue sur $V\times V$ et V-elliptique et L forme lin. cont. sur V. On considère aussi pour $m\in\mathbb{N}^*$ le P.A.V.G. : Trouver $u_m\in V_m$ t.q. $a(u_m,v) = L(v)$ $\forall v\in V_m$ $(m\geq 1)$

On sait alors que $u_m\longrightarrow u$ dans V (u sol. théorique unique de P.V.G. évoqué précedemment et u_m solution unique du P.A.V.G. $(\mathcal{P}_m)$: $a(u_m,v) = L(v)$ $\forall v\in V_m$ $\exists u_m$ $\forall m\geq 1$)

On suppose de plus que "a" est symétrique ; il est alors équivalent de résoudre le P.V.G. ou bien de résoudre le pb de minimisation : $(\mathcal{P}_{min})$: $J(u) = \inf_{v\in V} J(v)$

De même ou a : Résoudre $a(u_m,v) = L(v)$ $\forall v\in V_m$ $\exists u_m \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{m,min})$: $J(u_m) = \inf_{v\in V_m} J(v)$ (2pts)

avec $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$

Montrer alors que la suite $\{J(u_m)\}_{m\geq 1}$ est décroissante et que $J(u_m)\xrightarrow[m\infty]{} J(u)$ ds $\mathbb{R}$

12) Etant donné un élém. fini de Lagrange (K,P,Σ), $\{p_i\}_{i=1}^{Card(\Sigma)=N}$ une base de fctions de forme de $P = \langle p_1,\cdots,p_N\rangle$ avec $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ $(1\leq i,j\leq N)$ où $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N}$, on définit alors l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ par l'application (notée Π) qui à tte fction $v: K\to\mathbb{R}$ associe la fction $\Pi v = \sum_{i=1}^{N} v(a_i)p_i \in P$ (Πv est le P-interpolé de v sur Σ).

Montrer alors que l'opérateur Π est linéaire sur l'espace des fctions définies sur K (à valeurs réelles) et montrer aussi que la seule fonction de P qui s'annulle sur Σ n'est autre que la fonction identiquement nulle. (2pts)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2016/2017.
Mai 2017.
Eléments finis. (Master1-S2)
(Master EDP&Appli.)

Corrigé de l'épreuve de contrôle

1) f et $g \in L^2(\Omega)$ $\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} < +\infty \Rightarrow f.g \in L^1(\Omega)$

2) $(x_n)_{n\geq 1}$ suite numérique t.q. $\lim_{n\infty} |x_n| = \ell$

a) si $\ell = 0$ alors $x_n \leq |x_n| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ c.à.d. $\lim_{n\infty} x_n = 0$

b) $x_n = (-1)^n$ divergente pourtant $|x_n| = |(-1)^n| = 1\ \forall n \Rightarrow \lim_{n\infty} |x_n| = 1$

3) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de $L^1(\Omega)$ convergente c.à.d. $\lim_{n\infty} f_n = f$ ds $L^1(\Omega) \Leftrightarrow \lim_{n\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$
On en déduit que tte s/suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ est convergente ds $L^1(\Omega)$ t.q. $\lim_{k\infty} f_{n_k} = f$ c.à.d. $\lim_{k\infty} \|f_{n_k} - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$. Par ailleurs, d'après le thm du rappel, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ t.q. $\lim_{k\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ p.p. sur Ω. Donc d'après ce qui précède $\|f_{n_k} - f\|_{L^1(\Omega)} \xrightarrow[k\infty]{} 0$. On pose alors $g_k = \int_\Omega (f_{n_k} - f)\,dx\ \ \forall k \geq 1$, on écrit alors $g_k = \int_\Omega (f_{n_k}(x) - f(x))\,dx \leq |g_k| = \left|\int_\Omega (f_{n_k} - f)\,dx\right| \leq \int_\Omega |f_{n_k} - f|\,dx \longrightarrow 0$ qd $k \to \infty$
$\xRightarrow{2.a)} \lim_{k\to\infty} g_k = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega (f_{n_k}(x) - f(x))\,dx \xrightarrow[k\infty]{} 0$ c.à.d. $\lim_{k\infty} \int_\Omega f_{n_k}(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{k\infty} f_{n_k}(x)\,dx$

4) $\{u_m\}_{m\geq 1}$ suite convergente ds $L^2(\Omega)$ t.q. $\lim_{m\infty} u_m = u$ ds $L^2(\Omega)$ et $v_p \in L^2(\Omega)\ \forall p \in \mathbb{N}^*$

a) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\|u_m v_p - u v_p\|_{L^1(\Omega)} = \|(u_m - u)v_p\|_{L^1(\Omega)} \overset{1)}{\leq} \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)} \|v_p\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[m\infty]{} 0$
Ce qui montre que $\lim_{m\infty} u_m v_p = u v_p$ ds $L^1(\Omega)\ \forall p \in \mathbb{N}^*$ puisque $\lim_{m\infty} u_m = u$ ds $L^2 \Leftrightarrow \lim_{m\infty} \|u_m - u\|_{L^2} = 0$

b) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_m = u_m v_p$ (p fixé). D'après 3), puisque $\lim_{m\infty} f_m = \lim_{m\infty} u_m v_p = u v_p = f$ ds L^1 alors $\exists$ une s/suite $f_{m_k} = u_{m_k} v_p$ ($k \geq 1$) de $(f_m)_{m\geq 1}$ ds $L^1(\Omega)$ t.q. $\lim_{k\infty} \int_\Omega f_{m_k}(x)\,dx = \lim_{k\infty} \int_\Omega u_{m_k}(x) v_p(x)\,dx$
$= \int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega u v_p\,dx = \int_\Omega \lim_{k\infty} f_{m_k}(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{k\infty} (u_{m_k} v_p)\,dx = \int_\Omega \left(\lim_{k\infty} u_{m_k}\right) v_p\,dx.$

5) $\Omega =]0,2[$ $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u(0) = u(2) = 0$ et $u(x) = \begin{cases} x & \text{sur }]0,1] \\ 2-x & \text{sur }]1,2[\end{cases} \Rightarrow u'(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur }]0,1] \\ -1 & \text{sur }]1,2[\end{cases}$
avec $u'(0) = 1$ et $u'(2) = -1$

6) $a,b,c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c < b$ et $v \in \mathcal{C}([a,b])$ t.q. $v|_{]a,c[} \in H^1(]a,c[)$ et $v|_{]c,b[} \in H^1(]c,b[)$

a) $\int_a^b v^2\,dx = \int_a^c v^2(x)\,dx + \int_c^b v^2(x)\,dx = \|v|_{]a,c[}\|^2_{L^2(]a,c[)} + \|v|_{]c,b[}\|^2_{L^2(]c,b[)} < +\infty$
car $v|_{]a,c[} \in L^2(]a,c[)$ et $v|_{]c,b[} \in L^2(]c,b[)$ Donc $v \in L^2(]a,b[)$.

b) $Dv :]a,b[\to \mathbb{R}$ t.q. $Dv|_{]a,c[} = v'|_{]a,c[}$ et $Dv|_{]c,b[} = v'|_{]c,b[}$
$\int_a^b Dv^2\,dx = \int_a^c Dv^2\,dx + \int_c^b Dv^2\,dx = \int_a^c v'|^2_{]a,c[}\,dx + \int_c^b v'|^2_{]c,b[}\,dx = \|v'|_{]a,c[}\|^2_{L^2(]a,c[)} + \|v'|_{]c,b[}\|^2_{L^2(]c,b[)} < +\infty$
car $v'|_{]a,c[} \in L^2(]a,c[)$ et $v'|_{]c,b[} \in L^2(]c,b[)$

Donc $Dv \in L^2(]a,b[)$.

.../...

c) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ $\langle Dv, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_a^b Dv.\varphi\, dx = \int_a^c v'|_{]a,c[}\,\varphi\, dx + \int_c^b v'|_{]c,b[}\,\varphi\, dx$

$= \int_a^c v'\varphi\, dx + \int_c^b v'\varphi\, dx = [v\varphi]_a^c - \int_a^c v\varphi'\, dx + [v\varphi]_c^b - \int_c^b v\varphi'\, dx = \left(v|_{[a,c]}(c)\varphi(c) - v(a)\varphi(a)\right) - \int_a^c v\varphi'\, dx + \left(v(b)\varphi(b) - v|_{[c,b]}(c)\varphi(c)\right) - \int_c^b v\varphi'\, dx$

$= -\int_a^c v\varphi'\, dx - \int_c^b v\varphi'\, dx = -\int_a^b v\varphi'\, dx$

$= -[v\varphi]_a^b + \int_a^b v'\varphi\, dx = \int_a^b v'\varphi\, dx = \langle v', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$

$v \in \mathcal{C}([a,b])$
$\Rightarrow v|_{[a,c]}(c) = v|_{[c,b]}(c)$
et $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ $\langle Dv, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle v', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$
Concl. $Dv = v'$ au sens des distributions sur $]a,b[$.

Comme, d'après a) et b), $v \in L^2(]a,b[)$ et $v' = Dv \in L^2(]a,b[)$, on en déduit que $v \in H^1(]a,b[)$. (c.q.f.d.)

7) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

8) $\forall a,b \in \mathbb{R}^+$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leqslant a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = 2(a^2+b^2)$ d'après 7)
$\Rightarrow a+b = |a+b| = \sqrt{(a+b)^2} \leqslant \sqrt{2}\,(a^2+b^2)^{1/2}$ puisque $a,b \geqslant 0 \Rightarrow |a+b| = a+b$
et la fction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

9) Ds $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(n=2)$, on détermine deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que
$\forall v \in H^1(\Omega)$ $C_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|v\|_{S,H^1(\Omega)} \leqslant C_2\|v\|_{H^1(\Omega)}$ où $\|v\|_{S,H^1(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}$
et $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$.
Pour cela, il suffit de montrer que :
$\forall a,b,c \in \mathbb{R}^+$ $(a^2+b^2+c^2)^{1/2} \leqslant a+b+c$
et que $a+b+c \leqslant \sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$ pour déduire que $C_1 = 1$ et $C_2 = \sqrt{3}$.
Il est évident que $a+b+c \geqslant (a^2+b^2+c^2)^{1/2}$ $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^+$ puisque $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+\underbrace{ab+\cdots}_{\geqslant 0} \geqslant a^2+b^2+c^2$
$\Rightarrow a+b+c = |a+b+c| \geqslant (a^2+b^2+c^2)^{1/2}$
Par ailleurs, $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac+b^2+ba+bc+c^2+cb+ca$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+bc \leqslant a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)$
$= 3(a^2+b^2+c^2)$ d'après 7)
$\Rightarrow a+b+c = |a+b+c| \leqslant \sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$
Posant $a = \|v\|_{L^2(\Omega)}$ $b = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}$ et $c = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)}$ alors $\|\cdot\|_{S,H^1(\Omega)} \sim \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ avec $C_1 = 1$ et $C_2 = \sqrt{3}$

10) $V = \bigoplus_{n\geqslant 1} E_n$ où E_n s/esp. de dimension finie de V t.q. $E_n \perp E_m$ si $n \neq m$
$V_0 = \{x \in V / \exists m \in \mathbb{N}^*$ t.q. $x = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i=\overline{1,m})$ et $x_i \in E_i$ $(i=\overline{1,m})\}$.
$\bar{u} \in V_0$, on montre alors que, pour k assez grand, $\bar{u} = S_k\bar{u} = \sum_{j=1}^{k}\Pi_j\bar{u}$ où $\Pi_j\bar{u}$ est l'unique projection orthogonale de $\bar{u}$ sur $E_j \ni \Pi_j\bar{u}$ $(j=\overline{1,k})$.
$\bar{u} \in V_0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\bar{u} = \sum_{j=1}^{m}\beta_j x_j$ $x_j \in E_j$ $(j=\overline{1,m}) \Rightarrow \beta_j x_j \in E_j \underset{s.e.v.}{\subset} V$ $(j=\overline{1,m})$
Posant $u_j = \beta_j x_j$ $(j=\overline{1,m}) \Rightarrow u_j \in E_j$ $(j=\overline{1,m})$ alors $\bar{u} = \sum_{j=1}^{m}u_j$ avec $u_i \perp u_j$ si $i \neq j$
c.à.d. $\langle u_i, u_j\rangle_V = 0$ si $i \neq j$.
k étant assez grand on peut le choisir t.q. $k \geqslant m$. Ds ce cas on peut écrire $(k > m)$
$\bar{u} = \sum_{j=1}^{k}u_j = \sum_{j=1}^{m}u_j + \sum_{j=m+1}^{k}0_V$. Montrons à présent que $u_j = \Pi_j\bar{u}$ projection

orthogonale de $\bar{u}$ sur E_j ($j=\overline{1,k}$) sachant que $\forall j$ $O_V = \Pi_j O_V \in E_j \underset{s.e.v.}{\subset} V$.
Utilisant le rappel important de l'énoncé et pour montrer que u_j n'est autre que $\Pi_j \bar{u}$ (l'unique proj. orthogonale de $\bar{u}$ sur E_j) il suffit de montrer que :

$\langle \bar{u} - u_i, v\rangle_V = 0 \ \forall v \in E_j$ ($j=\overline{1,m}$).

En effet, $\forall j=\overline{1,m}$ $\langle \bar{u} - u_j, v\rangle_V = \langle \bar{u}, v\rangle_V - \langle u_j, v\rangle_V = \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, v\rangle_V - \langle u_j, v\rangle_V$ ($\forall v \in E_j$)
mais $v \in E_j \Rightarrow \langle u_i, v\rangle_V = 0$ $\forall i \in \{1,\dots,j-1,j+1,\dots,m\}$ c.à.d. $\langle u_i, v\rangle_V = 0$ $\forall i = 1,\dots,\hat{j},\dots,m$ ($i \neq j$)
puisque $u_i \in E_i \perp E_j$ si $i \neq j$ ($\langle u_i, w\rangle = 0 \ \forall w \in E_j$ qd $i \neq j$) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, v\rangle_V = \langle u_j, v\rangle_V$
Par suite $\langle \bar{u} - u_j, v\rangle_V = \langle u_j, v\rangle_V - \langle u_j, v\rangle_V = 0 \Rightarrow u_j = \Pi_j \bar{u}$. et ceci $\forall j = \overline{1,m}$
Enfin, on peut écrire $\bar{u} = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j \bar{u} + \sum_{j=m+1}^{k} \Pi_j O_V = \sum_{j=1}^{k} \Pi_j \bar{u} = S_k \bar{u}$ ($\bar{u} = \bar{u} + O_V$)
(sachant que l'on peut étendre la somme de m termes donnant $\bar{u}$ à une somme de k termes $k \geq m$ avec $(k-m)$ termes nuls : $\bar{u} = \bar{u} + O_V = \sum_{j=1}^{m} u_j + \sum_{j=m+1}^{k} O_V$).

11) V $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert, $\{V_m\}_{m\geq 1}$ suite croissante de s.e.v. fermés de V t.q. $\dim V_m = m$ et $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \cdots \subset \bigcup_{m\geq 1} V_m \subset V$. u étant l'unique solution du P.V.G.
$a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in V$ (a forme bilin. cont. sur $V \times V$, V-elliptique et symétrique
($u \in V$) et L forme lin. cont. sur V).
et pour $m \in \mathbb{N}^*$ u_m étant l'unique solution du P.A.V.G : $\underbrace{u_m \in V_m \text{ et } a(u_m, v) = L(v)}_{\forall v \in V_m}$
On a alors : Résoudre $(P_m) \Leftrightarrow$ Résoudre $(P_{m,min})$: $J(u_m) = \inf_{v \in V_m} J(v)$ (P_m) où $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$
puisque, rappelons-le, a est, de plus, symétrique.
On montre alors que $\{J(u_m)\}_{m\geq 1}$ est décroissante c.à.d. $\forall m \geq 1$ $J(u_m) \geq J(u_{m+1})$.
En effet, $J(u_{m+1}) = \inf_{v \in V_{m+1}} J(v) \leq J(v)$ $\forall v \in V_{m+1} \supset V_m \Rightarrow J(u_{m+1}) \leq J(v)$ $\forall v \in V_m \ni u_m$
$\Rightarrow J(u_{m+1}) \leq J(u_m)$
Donc $(J(u_m))_{m\geq 1}$ décroissante.
Comme J est cont. sur V puisque c'est une combinaison lin. de fonctionnelles continues sur V : $v \mapsto a(v,v)$ et $v \mapsto L(v)$ st cont. sur V, alors il est clair que $u_m \xrightarrow[m\to\infty]{V} u \Rightarrow J(u_m) \xrightarrow[m\to\infty]{\mathbb{R}} J(u)$. C.S.

12) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $v_1, v_2 : K \to \mathbb{R}$ $\Pi(\alpha v_1 + \beta v_2) := \sum_{i=1}^{N} (\alpha v_1 + \beta v_2)(a_i) p_i = \alpha \sum_{i=1}^{N} v_1(a_i) p_i + \beta \sum_{i=1}^{N} v_2(a_i) p_i$
$= \alpha \Pi v_1 + \beta \Pi v_2$ c.à.d. Π est linéaire.
$p \in P \Rightarrow \exists \{\beta_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathbb{R} / p = \sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i$
$p(a_j) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i(a_j) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \delta_{ij} = \beta_j$ pour $j = \overline{1,N}$. Donc $p = \sum_{i=1}^{N} p(a_i) p_i$ $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N}$
p nulle sur $\Sigma \Rightarrow p(a_j) = 0$ $\forall j = \overline{1,N} \Rightarrow p = \sum_{i=1}^{N} 0.p_i \equiv 0$
Donc p est la fonction identiquement nulle si elle s'annulle sur Σ.