Université de Tlemcen | Département de Mathématiques

3^e Année Licence – S6 | Mai 2017

Equations aux Dérivées Partielles | Examen Partiel | 1H45

***Exercice 1(8pts)**: Soient $R > 0$ et g une fonction réelle $2\pi -$ périodique et continue.*
On considère le problème suivant, (r, θ) désignant les coordonnées polaires :

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < R \\ u(R, \theta) = g(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

1. *En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la fonction $u(r, \theta)$ solution du problème $(\mathcal{P})$.*
2. *La solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par :*

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Ecrire les coefficients a_n et b_n et en déduire que,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \alpha) + r^2}\right) g(\alpha) d\alpha.$$

3. *Soit $G(r, \theta; r', \alpha)$ la fonction de Green pour le laplacien (en coordonnées polaires) relative au disque de centre O et de rayon R, $D(O, R) \subset \mathbb{R}^2$.*

Déduire des questions précédentes l'expression explicite de

$$\frac{\partial G}{\partial r'}(r, \theta; R, \alpha).$$

***Exercice 2(7pts)**: Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^2(\Omega)$. On pose*

$$u(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$

où $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$ et $A(n) = 2\sqrt{\pi^n}/\big(n\Gamma(n/2)\big)$.

1. *En utilisant un changement de variable, montrer que $u(r)$ est la valeur moyenne d'une fonction sur $\partial B(0, 1)$.*
2. *Montrer, en utilisant une formule de Green, que*

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy.$$

3. *En déduire que si*

$$f(x) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$

pour toute boule fermée $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$ alors f est harmonique.

***Exercice 3 (5pts)**: Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

Montrer que si u est harmonique dans Ω alors, $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Bon Courage

Université de Tlemcen | Département de Mathématiques
3e Année Licence – S6 | Mai 2017
Equations aux Dérivées Partielles | Examen Partiel | 1H45

Corrigé

***Exercice 1(8pts)*:**

$$(\mathcal{P})\ \begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, & 0<r<R \\ u(R,\theta)=g(\theta) & 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

*1. (**3pts**) Posons* $u(r,\theta)=V(r)T(\theta)$,

En portant dans l'équation, on obtient après division par $V(r)T(\theta)$:

$$r^2\frac{V''}{V}+r\frac{V'}{V}=-\frac{T''}{T}$$

Les variables r et θ étant indépendantes, les deux membres sont alors constants, on a

$$r^2\frac{V''}{V}+r\frac{V'}{V}=\lambda=-\frac{T''}{T}\,,\qquad \lambda\ \text{constante réelle}$$

L'équation de départ donne naissance aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} T''+\lambda T=0 \\ r^2V''+rV'-\lambda V=0. \end{cases}$$

a. $T''+\lambda T=0$

- *Si* $\lambda=0$ *alors* $T(\theta)=A\theta+B$.
  Comme la fonction T doit-être périodique alors $A=0$ *et* $T\equiv$ *cste.*
- *Si* $\lambda<0$ *alors* $T(\theta)=Ae^{\theta\sqrt{-\lambda}}+Be^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ *et pour la même raison* $T\equiv 0$.
- *Si* $\lambda>0$ *alors* $T(\theta)=A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta)+B\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$
  Déterminons les coefficients A et B.
  Des conditions $T(0)=T(2\pi)$ *et* $T'(\theta)=T'(2\pi)$, *on obtient le système*

$$(S)\begin{cases} A\left(\cos(2\pi\sqrt{\lambda})-1\right)+B\sin(2\pi\sqrt{\lambda})=0 \\ -A\sin(2\pi\sqrt{\lambda})+B\left(\cos(2\pi\sqrt{\lambda})-1\right)=0. \end{cases}$$

Si le déterminant de (S) *est non nul alors* $A=B=0$ *et T est identiquement nulle. Les solutions non triviales sont alors obtenues pour* $Det(S)=0$.

$$Det(S)=0\Leftrightarrow\cos(2\pi\sqrt{\lambda})=1\Leftrightarrow\ \lambda=n^2,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

On obtient des solutions non triviales pour $\lambda=0$ *avec* $T\equiv$ *cste et pour* $\lambda=n^2\in\mathbb{N}^*$ *avec* $T(\theta)=A\cos(n\,\theta)+B\sin(n\,\theta)$.

La famille des solutions de l'équation enT est :

$$T_n(\theta)=A_n\cos(n\,\theta)+B_n\sin(n\,\theta)\,,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

b. Résolvons l'équation en V: $r^2V'' + rV' - \lambda V = 0$, *pour* $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}$.

- *Si* $\lambda = 0$, *l'équation devient* $rV'' + V' = 0$.
  c.-à-d. $(rV')' = 0$ *d'où* $rV' = C$ *et* $V(r) = C_1 + C\ln|r|$.
  La solution doit-être bornée (au voisinage de 0) donc $C = 0$ *et* $V \equiv cste$.
- *Si* $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}^*$, $r^2V'' + rV' - n^2V = 0$,
  C'est une équation d'Euler, posons $V(r) = r^\alpha$ *et remplaçons dans l'équation, nous obtenons*
  $$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha = 0$$
  Ceci nous donne
  $$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \qquad d'où \qquad \alpha = \pm n.$$
  Et la solution cherchée est, $V(r) = Dr^n + Er^{-n}$,
  Comme V doit-être bornée en 0, on prend $E = 0$ *et par suite* $V(r) = Dr^n$.
  En combinant ces deux cas, la famille des solutions de l'équation en V est
  $$V_n(r) = D_n r^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$
  Par le principe de superposition la solution de $(\mathcal{P})$ *est*
  $$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(r)T_n(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n(c_n\cos(n\,\theta) + d_n\sin(n\,\theta))$$

où l'on a posé $c_n = A_nD_n$ *et* $d_n = B_nD_n$.

Déterminons les coefficients c_n *et* d_n *:*

On a $u(R,\theta) = g(\theta)$ *d'où*

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n(c_n\cos(n\,\theta) + d_n\sin(n\,\theta))$$

On reconnaît les coefficients de Fourier de la fonction g: c_0, c_nR^n *et* d_nR^n $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)d\alpha,\ c_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\cos(n\,\alpha)d\alpha,\quad d_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\sin(n\,\alpha)d\alpha,$$

2. **(3pts)** *En portant ces coefficients dans l'expression de* $u(r,\theta)$ *on obtient*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos(n\,\theta) + b_n\sin(n\,\theta))$$

avec $a_n = c_nR^n$ *et* $b_n = d_nR^n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Avec ces nouveaux coefficients on a*

$$u(r,\theta) = a_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[\cos(n\,\theta)\cos(n\,\alpha) + \sin(n\,\theta)\sin(n\,\alpha)]\,g(\alpha)d\alpha$$

$$u(r,\theta) = a_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos\big(n(\theta-\alpha)\big)\, g(\alpha)d\alpha$$

Et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos\big(n(\theta-\alpha)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{e^{in(\theta-\alpha)}+e^{-in(\theta-\alpha)}}{2}$$

$$= \frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{2R\left(1-\frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{R}\right)} + \frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{2R\left(1-\frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{R}\right)}$$

$$= \frac{re^{i(\theta-\alpha)}\big(R-re^{-i(\theta-\alpha)}\big)+re^{-i(\theta-\alpha)}\big(R-re^{i(\theta-\alpha)}\big)}{2(R-re^{i(\theta-\alpha)})(R-re^{-i(\theta-\alpha)})}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos\big(n(\theta-\alpha)\big) = \frac{Rr\cos(\theta-\alpha)-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}$$

Par suite

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Rr\cos(\theta-\alpha)-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}g(\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)+r^2}\right)g(\alpha)d\alpha. \qquad c.q.f.d.$$

3. **(2pts)** *$G(r,\ \theta;\ r',\ \alpha)$ étant la fonction de Green pour le laplacien (en coordonnées polaires) relative au disque de centre O et de rayon R, $D(O,\ R)\subset\mathbb{R}^2$.*
Calculons $\frac{\partial G}{\partial r'}(r,\theta;\ R,\alpha)$:
On sait que la solution de $(\mathcal{P})$ en terme de la fonction de Green est donnée par :

$$u(r,\theta) = -\int_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial r'}(r,\theta;\ R,\alpha)g(\alpha)d\alpha\,;$$

en identifiant avec l'expression intégrale de $u(r,\theta)$ on trouve

$$\frac{\partial G}{\partial r'}(r,\theta;\ R,\alpha) = -\frac{R^2-r^2}{2\pi(R^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)+r^2)}.$$

***Exercice 2(7pts)*:** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f \in C^2(\Omega)$. On pose*

$$u(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$

où $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$ et $A(n) = 2\sqrt{\pi^n}/(n\Gamma(n/2))$.

1. **$(2,5pts)$** *Montrons que $u(r)$ est la valeur moyenne d'une fonction sur $\partial B(0, 1)$.*

   Posons $y = x + rz$, alors $|z| \coloneqq \|z\| = 1$ car $|y - x| = r$, et donc $z \in \partial B(0, 1)$ et $ds(y) = r^{n-1} ds(z)$.

   En remplaçant on trouve

$$u(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds(y) = \frac{1}{nA(n)} \int_{\partial B(0,1)} f(x + rz)\, ds(z)$$

   Et puisque $nA(n) = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$ et la mesure de la sphère unité alors $u(r)$ est bien la valeur moyenne de la fonction $z \longmapsto f(x + rz)$ sur $\partial B(0, 1)$.

2. **$(2,5pts)$** *Montrons que*

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy.$$

On a

$$u(r) = \frac{1}{nA(n)} \int_{\partial B(0,1)} f(x + rz)\, ds(z)$$

D'où

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)} \int_{\partial B(0,1)} \nabla f(x + rz).z\, ds(z)$$

Et par le changement $y = x + rz$, on trouve

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla f(y).\frac{y - x}{r} ds(y) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla f(y).\eta\, ds(y)$$

car $\frac{y-x}{r}$ est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de $\partial B(x, r)$.

On obtient par l'identité de Green $\left(\int_\Omega \Delta v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla v.\eta\, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} ds\right)$:

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy.$$

3. **(2pts)** *Montrons que si*

$$f(x) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$

pour toute boule fermée $\bar{B}(x,\ r) \subset \Omega$ *alors* f *est harmonique.*

En dérivant par rapport à r les deux membres et en utilisant la question 2., on obtient :

$$\frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy = 0, \quad \forall \bar{B}(x,r) \subset \Omega,$$

d'où $\Delta f = 0$ *dans* Ω *et* f *est harmonique dans* Ω.

***Exercice 3 (5pts)*:** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert borné non vide,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Montrons que si u est harmonique dans Ω *alors,* $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Posons $u_\varepsilon := u + \varepsilon|x|^2$, $\varepsilon \geq 0$ *; et supposons que la fonction* u_ε *atteint son maximum en un point* $\bar{x}$ *intérieur à* Ω.

Alors $\nabla u_\varepsilon(\bar{x}) = 0$ *et la matrice hessienne* $\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})\right)_{1\leq i,j\leq n}$ *est définie négative.*

Or $\Delta u_\varepsilon = 2n\varepsilon \geq 0$ *puisque* $\Delta u = 0$ *(car u est harmonique), et comme* $\Delta u_\varepsilon(\bar{x})$ *est la trace de la matrice hessienne* $\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})\right)_{1\leq i,j\leq n}$ *on aboutit à une contradiction,*

donc $\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$. *Et le résultat demandé s'ensuit en faisant tendre* $\varepsilon \to 0^+$.