Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016-2017.

Master I -E.D.P - Semestre 1.
Module : *Analyse Fonctionnelle 1* - Contrôle Continu
Mardi 29/11/2016 - Durée : 1.5 h.

<u>Exercice 1 :</u>(10 points)
On considère $F = C^1([0,1])$ muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Pour $\alpha \in [0,1]$, on définit

$$\begin{aligned}\delta_\alpha :&F \to \mathbb{R}\\ &f \mapsto < \delta_\alpha, f >= f(\alpha).\end{aligned}$$

1). Montrer que δ_α est une forme linéaire continue sur F ?
2). Calculer $\|\delta_\alpha\|_{F'}$?
3). Déduire que l'ensemble $\{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$ est fermé dans F ?
4). Soit $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0,1]$. On définit formellement dans $F^{'}$ la série :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, \delta_{\alpha_n}.$$

Montrer que $T \in F^{'}$? Calculer $\|T\|_{F'}$?

<u>Exercice 2 :</u>(10 points)
On considère $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$F = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}.$$

On muni F de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
1). On considère l'opérateur de Volterra :

$$\begin{aligned}T :&E \to F\\ &f \mapsto Tf,\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}Tf :&[0,1] \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Montrer que T est une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(F, \|\cdot\|_\infty)$? Calculer sa norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)}$?
2). On définit l'opérateur linéaire :

$$\begin{aligned}S :&F \to E\\ &g \mapsto Sg = g^{'},\end{aligned}$$

Montrer que S n'est pas borné ?
3). Déduire que l'espace F n'est pas un espace de Banach.
4). Conclure que $C^1([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas un espace de Banach.

Master I E.D.P - S1 - 2016/2017

Module "Analyse Fonctionnelle 1".

Correction du C.C.

Exercice 1: (10 pts)

$$F = C^1([0,1]),\ \|\varphi\|_F := \|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|.$$

Pour $\alpha \in [0,1]$, fixé. On considère :

$$\delta_\alpha : F \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \langle \delta_\alpha, f\rangle = f(\alpha).$$

1°/ Montrer que δ_α est une forme linéaire continue :

* linéaire :

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in F$.

$$\langle \delta_\alpha, \lambda f + \mu g\rangle := (\lambda f + \mu g)(\alpha),$$
$$= \lambda f(\alpha) + \mu g(\alpha),$$
$$= \lambda\langle \delta_\alpha, f\rangle + \mu \langle \delta_\alpha, g\rangle,$$

d'où la linéairité. 1 pt

* Continue :

Soit $f \in F$.

$$|\langle \delta_\alpha, f\rangle| = |f(\alpha)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

donc :

$$|\langle \delta_\alpha, f\rangle| \leq 1 . \|f\|_\infty$$

Ceci est valable pour tout $f \in F$, d'où la continuité. (1pt)

On déduit en particulier que $\delta_\alpha \in F'$ et que

$\|\delta_\alpha\|_{F'} \leq 1$. ~ (☆1)

2) Calculer $\|\delta_\alpha\|_{F'} = ?$

$$\|\delta_\alpha\|_{F'} = \sup_{\substack{f \in F \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\langle \delta_\alpha, f \rangle| .$$

Pour $f \equiv 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$, ainsi

$$\langle \delta_\alpha, f \rangle = 1 \leq \|\delta_\alpha\|_{F'} \leq 1$$

(☆1)

D'où : $\boxed{\|\delta_\alpha\|_{F'} = 1}$ (1 pt)

3) On note $S = \{ f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0 \}$.

$$S = \{ f \in C^1([0,1]) : \delta_0(f) = 0 \}$$
$$= \delta_0^{-1}(\{0\}).$$

Comme $\delta_0 : F \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\{0\}$ fermé de $\mathbb{R}$ alors S est un fermé de $(F, \|\cdot\|_\infty)$ - comme étant l'image inverse par une application continue d'un fermé.

(2 pts)

2

4) $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$. Dans F' on considère (formellement) :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{\alpha_n}.$$

* Montrons que $T \in F'$? 3 pts

$F' = \mathcal{L}(F;\mathbb{R})$. (dual topologique de F)

Puisque $\mathbb{R}$ est complet alors $\mathcal{L}(F;\mathbb{R})$ est un espace complet (i.e. un espace de Banach par rapport à la norme duale).

Ainsi, toute série normalement convergente dans F' est convergente. En particulier, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^n} \delta_{\alpha_n} \right\|_{F'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\|\delta_{\alpha_n}\|_{F'}}_{=1 \ (Q2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{\alpha_n}$ est normalement convergente donc elle converge vers un élément $T \in F'$.

Calculons $\|T\|_{F'}$?

$$\|T\|_{F'} = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{\alpha_n}\right\|_{F'} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|\delta_{\alpha_n}\|_{F'} = 2,$$

donc $\boxed{\|T\|_{F'} \leq 2}$. $\star_2$

Pour $f \equiv 1$ $(\in F)$ on a :

$$\langle T, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\langle \delta_{\alpha_n}, 1\rangle}_{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

$$\|T\|_{F'} = \sup_{\|g\|_F = 1} |\langle T, g\rangle|$$

Ainsi : pour $f \equiv 1$

$$\boxed{\|T\|_{F'} \geq |\langle T, f\rangle| = 2} \quad \star_3$$

De $\star_2$ et $\star_3$ on conclut :

$$\boxed{\|T\|_{F'} = 2}.$$

2 pts

Exercice 2 :

$E = C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

$F = \{ f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0 \}$, F muni de $\|\cdot\|_\infty$.

(On rappelle que l'espace F est un espace fermé de $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ Q3. Ex 1).

1) Soit T l'opérateur de Volterra :

$$T : E \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto Tf : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto Tf(x) = \int_0^x f(r)dr.$$

$T : E \to F$ est linéaire continue ?

Soient $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\langle T, \lambda f + \mu g \rangle = \lambda \langle T, f \rangle + \mu \langle T, g \rangle$? 1pt

Soit $x \in [0,1]$.

$$\langle T, \lambda f + \mu g\rangle(x) := \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\,dt$$
$$= \lambda \int_0^x f(t)\,dt + \mu \int_0^x g(t)\,dt$$
$$= \lambda \langle T, f\rangle(x) + \mu \langle T, g\rangle(x).$$

Ceci est vrai pour tout $x \in [0,1]$, on déduit donc que $\langle T, \lambda f + \mu g \rangle = \lambda \langle T, f \rangle + \mu \langle T, g \rangle$.

(À noter que si f est une fct continue sur $[0,1]$ alors la fonction $x \longmapsto Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est une fonction de classe $C^1([0,1])$).

T est continue? 1 pt

Soit $f \in E$ et soit $x \in [0,1]$.

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \cdot x \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Ainsi,

$$\sup_{x\in[0,1]} |Tf(x)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Autrement dit,

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \qquad (\forall f \in E) \sim \Delta$$

d'où la continuité.

On remarque en particulier que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} := \operatorname{Inf}\{M>0 \,/\, (\forall f\in E)\ \|Tf\|_F \leq M\|f\|_E\}$$

$$\boxed{\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq 1} \sim 2.1$$

(voir Δ).

Calculons $\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} = ?$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} = \sup_{\substack{f\in E \\ \|f\|_\infty = 1}} \|Tf\|_\infty .$$

pour $f \equiv 1$, on a $\langle T, f\rangle(x) = \int_0^x 1 . dt = x$.

Ainsi : $\|\langle T, f\rangle\|_\infty = 1$.

$$\|\langle T, f\rangle\|_\infty = 1 \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} \quad (2.2)$$

(2.1) et $(2.2) \Longrightarrow \boxed{\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} = 1}$.

2) $S : F \longrightarrow E$ $\qquad$ S linéaire.

$\qquad g \longmapsto Sg = g'$.

S n'est pas borné ?

$(S \text{ est borné}) \Leftrightarrow \left((\exists M > 0)\ (\forall g \in F)\ \|Sg\|_\infty \leq M \|g\|_\infty\right)$

Supposons par l'absurde que S est borné et considérons $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset F$, définie par $g_n(t) = e^{nt} - 1$.

On a : $Sg_n(t) = g_n'(t) = n e^{nt}$.

Or $\|g_n\|_\infty = e^n - 1$ et $\|g_n'\|_\infty = n e^n$.

Si S est borné alors :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n e^n \leq M (e^n - 1)$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n \leq M(1 - e^{-n}) \leq M$

Contradiction. 2 pts

3) F n'est pas un sp de Banach? 3 pts

Supposons que F est un sp de Banach.

Comme conséquence du théorème fondamentale d'analyse, on remarque que:

$$\begin{cases} S \circ T = I_{d_E} \\ T \circ S = I_{d_F}. \end{cases}$$

i.e: $S = T^{-1}$ et $T = S^{-1}$.

On sait que $E = C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach, et puisque $T : E \to F$ est continue alors selon le théorème de Banach $S = T^{-1}$ est aussi continue, ce qui contredit le résultat du question 2).

D'où: F n'est pas un espace de Banach.

4). Rappelons que d'après la question 3) de l'exercice 1) l'espace

$$F = \{ f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0 \}$$

est un s.e.v. fermé de $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Donc si : $(C^1([0,1]), \|.\|_\infty)$ est complet, alors $(F, \|.\|_\infty)$ l'est aussi. Ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.

2 pts