Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

A.U. : 2016-2017.
Module : Introduction aux équations différentielles fractionnaires
Niveau : Master 2.

Contrôle Continu.

Exercice.

Soit J_μ la fonction de Bessel de première espèce définie par la série de fonctions suivante

$$J_\mu(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\mu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\mu};$$

où $x \in \mathbb{R}$ et Γ est la fonction gamma d'Euler.

1°) Montrer que si α est un nombre complexe avec $Re(\alpha)>0$, alors on a

$$I_0^\alpha\left(J_0(\sqrt{x})\right) = 2^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{x}).$$

2°) Montrer en utilisant la question 1°) que si β est un nombre complexe avec $Re(\beta)>0$, alors on a

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}\left(2^\alpha t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{t})\right)dt$$

$$= 2^{\alpha+\beta}\, x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, J_{\beta+\alpha}(\sqrt{x}).$$

3°) En déduire de la question précédente que

$$\frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\,\tau^{\frac{\alpha}{2}}\, J_\alpha(\sqrt{x\tau})\,d\tau = 2^\beta\, J_{\beta+\alpha}(\sqrt{x}).$$

4°) En déduire la formule suivante

$$\frac{Z^\beta}{2^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\beta-1}\theta\, \sin^{\alpha+1}\theta\, J_\alpha(Z\sin\theta)\,d\theta = J_{\beta+\alpha}(Z).$$

5°) Montrer que si γ est un nombre complexe avec $0<Re(\gamma)<1$, alors on a

$${}^{RL}D_0^\gamma\left(x^{\frac{\tilde{\mu}}{2}} J_{\tilde{\mu}}(\sqrt{x})\right) = 2^{-\gamma}\, x^{\frac{\tilde{\mu}-\gamma}{2}}\, J_{\tilde{\mu}-\gamma}(\sqrt{x}),$$

où $\tilde{\mu}$ est un nombre complexe avec $Re(\tilde{\mu})>-1$.

6°)

6.1°) Vérifier que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x$

et $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x$

6.2°) En déduire de la question 5°) ${}^{RL}D_0^{\gamma}(\sin\sqrt{x})$

et ${}^{RL}D_0^{\gamma}\left(x^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{x}\right)$.

7°) Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

On pose par définition

$$\tilde{I}_{\tilde{\alpha}-1}^{\tilde{\alpha}} f(x) = 2^{\tilde{\alpha}} \tilde{k}^{1-\tilde{\alpha}} \int_0^x u\,(x^2-u^2)^{\frac{\tilde{\alpha}-1}{2}} J_{\tilde{\alpha}-1}\left(\tilde{k}\sqrt{x^2-u^2}\right) f(u)\,du,$$

et

$$\tilde{I}_{\tilde{k}}^{\tilde{\alpha}+1} f'(x) = 2^{\tilde{\alpha}} \tilde{k}^{-\tilde{\alpha}} \int_0^x (x^2-u^2)^{\frac{\tilde{\alpha}}{2}} J_{\tilde{\alpha}}\left(\tilde{k}\sqrt{x^2-u^2}\right) f'(u)\,du,$$

où $\tilde{\alpha} > 0$ et $\tilde{k} \geq 0$.

Montrer que si $f(0) = 0$, alors on a

$$\tilde{I}_{\tilde{k}}^{\tilde{\alpha}+1} f'(x) = \tilde{I}_{\tilde{\alpha}-1}^{\tilde{\alpha}} f(x).$$

Remarque : Pour cet exercice on pourra utiliser la formule de duplication de la fonction gamma suivante

$$2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma(2z).$$

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

A.U. : 2016-2017
Module : Introduction aux équations différentielles fractionnaires
Niveau : Master 2.

Corrigé du Contrôle Continu.

Exercice

1°) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha) > 0$, on a

$$I_0^\alpha \left(J_0(\sqrt{x})\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} J_0(\sqrt{t})\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{2k} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2\, 2^{2k}} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^k\, dt.$$

On pose $t = x v$, on obtient

$$I_0^\alpha \left(J_0(\sqrt{x})\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, x^{k+\alpha}}{(k!)^2\, 2^{2k}} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}\, v^k\, dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2\, 2^{2k}} B(\alpha, k+1)\, x^{k+\alpha}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(\alpha+k+1)\, 2^{2k}}\, x^{k+\alpha}$$

$$= 2^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, \Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

$$= 2^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{x}).$$

2°) Soit β un nombre complexe avec $Re(\beta)>0$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} \left(2^\alpha t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{t})\right) dt$$

$$= I_0^\beta \left(2^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{x})\right)$$

$$= I_0^\beta \left(I_0^\alpha (J_0(\sqrt{x}))\right)$$

$$= I_0^{\beta+\alpha} (J_0(\sqrt{x}))$$

$$= 2^{\alpha+\beta} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\alpha+\beta}(\sqrt{x}).$$ (D'après la première question).

3°) D'après la question précédente, on a

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}\, 2^{\alpha}\, t^{\frac{\alpha}{2}}\, J_{\alpha}(\sqrt{t})\,dt = 2^{\alpha+\beta}\, x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, J_{\beta+\alpha}(\sqrt{x}).$$

On pose $t = x.\tau$ dans l'intégrale, on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\, x^{\beta+\frac{\alpha}{2}}\, 2^{\alpha}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\,\tau^{\frac{\alpha}{2}}\, J_{\alpha}(\sqrt{x\tau})\,d\tau$$

$$= 2^{\alpha+\beta}\, x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, J_{\beta+\alpha}(\sqrt{x}).$$

C'st-à-dire,

$$\frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\,\tau^{\frac{\alpha}{2}}\, J_{\alpha}(\sqrt{x\tau})\,d\tau = 2^{\beta}\, J_{\beta+\alpha}(\sqrt{x}).$$

4°) D'après la question précédente on a,

$$\frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\,\tau^{\frac{\alpha}{2}}\, J_{\alpha}(\sqrt{x\tau})\,d\tau = 2^{\beta}\, J_{\beta+\alpha}(\sqrt{x}).$$

On pose $\sqrt{x} = Z$ et $\tau = \sin^2\theta$, on obtient

$$\frac{2Z^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\beta-1}\theta\, \sin^{\alpha+1}\theta\, J_{\alpha}(Z\sin\theta)\,d\theta = 2^{\beta}\, J_{\beta+\alpha}(Z).$$

C'st-à-dire,
$$\frac{Z^{\beta}}{2^{\beta-1}\,\Gamma(\beta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\beta-1}\theta\, \sin^{\alpha+1}\theta\, J_{\alpha}(Z\sin\theta)\,d\theta = J_{\beta+\alpha}(Z).$$

5°) Soit Υ un nombre complexe avec $0 < Re(\Upsilon) < 1$, on a

$$ {}^{RL}D_0^{\Upsilon}\left(x^{\frac{\tilde{\mu}}{2}} J_{\tilde{\mu}}(\sqrt{x})\right) = \frac{d}{dx} I_0^{1-\Upsilon}\left(x^{\frac{\tilde{\mu}}{2}} J_{\tilde{\mu}}(\sqrt{x})\right) $$

$$ = \frac{1}{2^{\tilde{\mu}}} \frac{d}{dx} 2^{\tilde{\mu}+1-\Upsilon} x^{\frac{\tilde{\mu}+1-\Upsilon}{2}} J_{\tilde{\mu}+1-\Upsilon}(\sqrt{x}) \quad \text{(D'après la 2ème question).} $$

$$ = 2^{1-\Upsilon} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \, x^{k+\tilde{\mu}+1-\Upsilon}}{k!\,\Gamma(\tilde{\mu}+1-\Upsilon+k+1)\, 2^{2k+\tilde{\mu}+1-\Upsilon}} $$

$$ = 2^{1-\Upsilon} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \, x^{k+\tilde{\mu}-\Upsilon}}{k!\,\Gamma(\tilde{\mu}-\Upsilon+k+1)\, 2^{2k+\tilde{\mu}+1-\Upsilon}} $$

$$ = 2^{-\Upsilon} x^{\frac{\tilde{\mu}-\Upsilon}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\tilde{\mu}-\Upsilon+k+1)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{2k+\tilde{\mu}-\Upsilon}. $$

$$ = 2^{-\Upsilon} x^{\frac{\tilde{\mu}-\Upsilon}{2}} J_{\tilde{\mu}-\Upsilon}(\sqrt{x}). $$

6°)

6.1°) On a,

$$ J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} $$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \; \frac{\Gamma(2k+2)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2k+1}\,\Gamma(k+1)}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

De même,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \, \Gamma(-\frac{1}{2}+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \, \Gamma(k+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \; \frac{\Gamma(2k)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2k-1}\,\Gamma(k)}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

6.2°)

On a,

$$ {}^{RL}D_0^{\gamma}(\sin\sqrt{x}) = {}^{RL}D_0^{\gamma}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x^{\frac{1}{4}}\, J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})\right) $$ (D'après la question précédente 6.1°)

$$ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 2^{-\gamma}\, x^{\frac{\frac{1}{2}-\gamma}{2}}\, J_{\frac{1}{2}-\gamma}(\sqrt{x}) $$ (D'après la 5ème question).

$$ = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\gamma+\frac{1}{2}}} \sqrt{x^{\frac{1}{2}-\gamma}}\, J_{\frac{1}{2}-\gamma}(\sqrt{x}). $$

De même, on a

$$ {}^{RL}D_0^{\gamma}\left(x^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{x}\right) = {}^{RL}D_0^{\gamma}\left(x^{-\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})\right) $$ (D'après la question précédente 6.1°).

$$ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, {}^{RL}D_0^{\gamma}\left(x^{-\frac{1}{4}}\, J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})\right) $$

$$ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 2^{-\gamma}\, x^{\frac{-\frac{1}{2}-\gamma}{2}}\, J_{-\frac{1}{2}-\gamma}(\sqrt{x}) $$ (D'après la 5ème question)

$$ = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\gamma+\frac{1}{2}}} \sqrt{x^{-\frac{1}{2}-\gamma}}\, J_{-\frac{1}{2}-\gamma}(\sqrt{x}). $$

7°) On a,

$$\left(\tilde{I}_{\tilde{k}}^{\tilde{\alpha}+1} f'\right)(x)$$

$$= 2^{\tilde{\alpha}}\, \tilde{k}^{-\tilde{\alpha}} \int_0^x (x^2-u^2)^{\frac{\tilde{\alpha}}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}+n+1)} \left(\frac{\tilde{k}\sqrt{x^2-u^2}}{2}\right)^{2n+\tilde{\alpha}} f'(u)\,du$$

$$= 2^{\tilde{\alpha}}\, \tilde{k}^{-\tilde{\alpha}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, \tilde{k}^{2n+\tilde{\alpha}}}{n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}+n+1)\, 2^{2n+\tilde{\alpha}}} \int_0^x (x^2-u^2)^{n+\tilde{\alpha}} f'(u)\,du$$

En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\left(\tilde{I}_{\tilde{k}}^{\tilde{\alpha}+1} f'\right)(x)$$

$$= 2^{\tilde{\alpha}}\, \tilde{k}^{-\tilde{\alpha}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, \tilde{k}^{2n+\tilde{\alpha}}\, 2}{n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}+n+1)\, 2^{2n+\tilde{\alpha}}} \int_0^x (n+\tilde{\alpha})\, u\, (x^2-u^2)^{n+\tilde{\alpha}-1} f(u)\,du$$

$$= 2^{\tilde{\alpha}}\, \tilde{k}^{1-\tilde{\alpha}} \int_0^x u\, (x^2-u^2)^{\frac{\tilde{\alpha}-1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-1+n+1)} \left(\frac{\tilde{k}\sqrt{x^2-u^2}}{2}\right)^{2n+\tilde{\alpha}-1} f(u)\,du$$

$$= 2^{\tilde{\alpha}}\, \tilde{k}^{1-\tilde{\alpha}} \int_0^x u\, (x^2-u^2)^{\frac{\tilde{\alpha}-1}{2}} J_{\tilde{\alpha}-1}\left(\tilde{k}\sqrt{x^2-u^2}\right) f(u)\,du$$

$$= \left(\tilde{I}_{\tilde{\alpha}-1}^{\tilde{\alpha}} f\right)(x).$$