Université de Tlemcen 2016/2017
Faculté des Sciences
Licence de Mathématiques
Processus Aléatoires

Examen Final

Durée 1H30

Questions de cours.(*4pts*)

Soit X une v.a. de loi de probabilité de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ où $\theta > 0$ est un paramètre et $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de X.

a. Calculer l'information de Fisher $I_{X_1}(\theta)$ de l'observation X_1.
En déduire l'information de Fisher $I_{(X_1,X_2,...,X_n)}(\theta)$ de l'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$.
b. Ecrire la fonction de vraisemblance $L(X_1, X_2, ..., X_n; \theta)$.
En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
c. Calculer l'estimateur de θ par la méthode des moments avec $g(x) = x$. (On le notera $\widehat{\theta}_{1,n}$)

Exercise 1.(*7pts*)

Soient $\sigma > 0$, X et M deux v. a. r avec $M \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}/M) = exp\big(itM - \frac{\sigma^2}{2}t^2\big), \quad P - p.s.$$

(1) Montrer que (X, M) est un vecteur gaussien.
(2) Montrer que $X - M$ et M sont indépendantes.
(3) En déduire $\mathbb{E}(X/M)$.

Exercise 2.(*9pts*)

Soit $\{X_k,\ k \geq 1\}$ une suite de v. a. r, indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et

$$Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}, \qquad h(x) = \min(-x, 0), \qquad Z_n = h(Y_n).$$

(1) Montrer que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$.
(2) Montrer que la suite $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ converge en loi vers une v. a. r Y à déterminer.
(3) Montrer que la suite $\{Z_n,\ n \geq 1\}$ converge en loi vers une v. a. r Z, donner la relation entre Z et Y puis calculer $\mathbb{E}(Z)$.
(4) Montrer que $\mathbb{E}(Z_n^2) \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.
(5) En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) \longrightarrow \mathbb{E}(Z)$ quand $n \to \infty$.
(6) Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et en déduire la formule de Stirling : $n! \ \sim\ (\frac{n}{\mathrm{e}})^n \sqrt{2\pi n}$.

On rappelle que : 1. Si X et Y sont deux v. a. r, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction boréliènne bornée, alors $\mathbb{E}(f(X)/X) = f(X)$ et $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X/Y)\big) = \mathbb{E}(X), P$- p.s.

2. Si (X_n) converge en loi vers X et si $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(|X_n|^{1+\alpha}) < \infty$, alors $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

3. $a_n \ \sim\ b_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Corrigé de l'examen

Processus aléatoires

Exo 1 :

$M \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{E}(e^{itX}/M) = e^{itM - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$ p.s.

1/ Mq (X,M) est un couple gaussien. (0,5)

(X,M) couple gaussien $\iff \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X + \beta M$ est une v. ale gaussienne.

Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, posons $Z = \alpha X + \beta M$.

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = \mathbb{E}(e^{i\alpha tX + i\beta tM})$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(e^{i\alpha tX + i\beta tM}/M)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i\beta tM}\,\mathbb{E}(e^{i\alpha tX}/M)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i(\beta t + \alpha t)M - \frac{\alpha^2 t^2}{2}\sigma^2}\right]$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2 t^2 \sigma^2}{2}}\,\varphi_M(\alpha t + \beta t)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2 + (\alpha+\beta)^2)t^2}$$

(2pts)

Donc : $Z = \alpha X + \beta M \sim \mathcal{N}(0, \alpha^2 + (\alpha+\beta)^2)$. cqfd.

2/ Mq $X-M \perp\!\!\!\perp M$?

(0,5)

$X-M \perp\!\!\!\perp M \iff \forall s,t \in \mathbb{R}$ $\varphi_{(X-M,M)}(s,t) = \varphi_{X-M}(s)\,\varphi_M(t)$

$$\varphi_{(X-M,M)}(s,t) = \mathbb{E}\left(e^{is(X-M)+itM}\right)$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{isX + i(t-s)M}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{isX + i(t-s)M} / M\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{i(t-s)M}\, \mathbb{E}\left(e^{isX} / M\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\cancel{e^{i(t-s)M}}\, \cancel{e^{isM}} e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}}\right]$$
$$= e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \varphi_M(t) \ldots\ldots (1)$$

1,5

$$\varphi_{X-M}(s) = \mathbb{E}\left(e^{is(X-M)}\right)$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{-isM}\, \mathbb{E}\left(e^{isX} / M\right)\right]$$
$$= e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \quad \ldots\ldots (2)$$

0,5

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\varphi_{(X-M,M)}(s,t) = \varphi_{X-M}(s)\, \varphi_M(t)$. cqfd.

3/ Calcul de $\mathbb{E}(X/M)$.

On a :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{itX}/M\right)\right] = \mathbb{E}\left(e^{itM - \frac{\sigma^2}{2}t^2}\right)$$
$$= e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} \varphi_M(t) = e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2+1)t^2}$$

0,25

Donc $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2+1)$

De plus $X-M \perp\!\!\!\perp M$, ainsi

$$\mathbb{E}(X/M) = \mathbb{E}(X-M/M) + M$$
$$= \mathbb{E}(X-M) + M$$
$$= \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{0} - \underbrace{\mathbb{E}(M)}_{0} + M = M.$$

1,25

Exo 2 :

1/ $\{X_k, k\geq 1\}$ i.i.d $\sim \mathcal{P}(1)$. $M_{X_1}(t) = e^{(e^t-1)}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

D'où

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_n}) = \prod^n \mathbb{E}(e^{tX_1})$$

$$= (M_{X_1}(t))^n = e^{n(e^t-1)}, \forall t\in\mathbb{R}.$$

1 pt

$\Rightarrow S_n \sim \mathcal{P}(n)$.

2/ $\{X_k, k\geq 1\}$ suite de v.a.r i.i.d, de plus $\mathbb{E}(X_1) = var(X_1) = 1$

par le T.L.C :

1 pt = (0,5 + 0,5)

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) = Y.$$

3/ $h(x) = \min(-x, 0) \Rightarrow h$ est continue sur $\mathbb{R}$, $Z_n = h(Y_n)$.

et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$. Donc $h(Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(Y) \Rightarrow Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

0,5 pt

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}[h(\mathcal{N}(0,1))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \min(-x,0)\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

0,5 pt

Donc $\mathbb{E}(Z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

4/ On sait que $S_n \sim \mathcal{P}(n) \Rightarrow \begin{cases}\mathbb{E}(S_n) = n \\ \mathbb{E}(S_n^2) = n^2+n.\end{cases}$

De plus :

1,5 pt

$$Z_n^2 = [\min(-Y_n, 0)]^2 = [\max(Y_n, 0)]^2 \leq |Y_n|^2, \quad \forall n.$$

D'où

$$\mathbb{E}(Z_n^2) \leq \mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[(S_n-n)^2] = \frac{1}{n}[\mathbb{E}(S_n^2) + n^2 - 2n\mathbb{E}(S_n)]$$

$\mathbb{E}(Z_n^2) \leq \frac{1}{n}(\cancel{n^2}+n+\cancel{n^2}-\cancel{2n^2}) = 1.$

5/ D'après 4/ : $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(Z_n^2) \leq 1 < \infty$ ①

D'après 3/ $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ ——— ②

4pt

① et ② et l'indication donnent :

$$\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(Z)$$

6/ Calcul de $\mathbb{E}(Z_n)$:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(h(Y_n)) = \mathbb{E}\left[h\left(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\right)\right] \quad (S_n \sim \mathcal{P}(n))$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} h\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) P_{S_n}(k).$$

$$= e^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty} \min\left(\frac{n-k}{\sqrt{n}},0\right)\frac{n^k}{k!}$$

2,5pts

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}(n-k)\frac{n^k}{k!}.$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left[n\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!} - \sum_{n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{(k-1)!}\right]$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left[n\cancel{\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}} - n\cancel{\sum_{j=n}^{+\infty}\frac{n^j}{j!}}\right] \quad (j=k-1)$$

$$\mathbb{E}(Z_n) = -\sqrt{n}\,e^{-n}\frac{n^n}{n!}$$

6/ Par 5/ $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z) \iff \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,e^{-n}\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

1pt

$$\iff n^n \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

4

Question cours :

$X \sim \mathcal{P}(\theta), \theta > 0$

a. $f(x,\theta) = P(X=x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}, x \in \mathbb{N}$

1pt

$I_{X_1}(\theta) = -\mathbb{E}\left((\ln f(X_1,\theta))''\right) \left[\overset{\text{ou}}{=}\left(\mathbb{E}\left(((\ln f(X_1,\theta))')^2\right)\right)\right]$

$\ln f(X_1,\theta) = -\theta + X_1 \ln\theta - \ln(X_1!)$

$\Rightarrow (\ln f(X_1,\theta))' = -1 + \frac{X_1}{\theta} \Rightarrow (\ln f(x_1,\theta))'' = -\frac{X_1}{\theta^2}$

D'où $I_{X_1}(\theta) = -\mathbb{E}\left((\ln f(X_1,\theta))''\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\theta^2}.\theta$

i.e. $\boxed{I_{X_1}(\theta) = \frac{1}{\theta}}$

0,5pt

$\boxed{I_{(X_1,\dots,X_n)}(\theta) = n I_{X_1}(\theta) = \frac{n}{\theta}}$

b. 0,5pt

$L(X_1,\dots,X_n,\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i,\theta) = \prod_{i=1}^n e^{-\theta}\frac{\theta^{X_i}}{X_i!} = \boxed{\frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum X_i}}{\prod_{i=1}^n X_i!}}$

$\hat{\theta}_n$ emv :

1pt

$\ln L(X_1,\dots,X_n,\theta) = -n\theta + \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\ln\theta - \ln\left(\prod_{i=1}^n X_i!\right)$

$\hat{\theta}_n = \underset{\theta>0}{\operatorname{Arg\,max}}\, L(X_1,\dots,X_n,\theta) = \underset{\theta>0}{\operatorname{Arg\,max}}\, \ln L(X_1,\dots,X_n,\theta)$

$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right) = 0 \Rightarrow -n + \frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n}$ { et c'est un pt. max car $(\ln L(\dots))'' < 0$, $-\frac{1}{\theta^2}(\sum X_i) \le 0$ car $X_i > 0$

c. $\hat{\theta}_{1,n}$ emm $g(x) = x$. $E(g(X_1)) = m(\theta) \Rightarrow \theta = m^{-1}(E(g(X_1)))$.

1pt

$\hat{\theta}_{1,n} = m^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_i)\right)$

ici $\mathbb{E}(g(X_1)) = E(X_1) = \theta$ donc $\boxed{\hat{\theta}_{1,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n}$