Epreuve de rattrapage

(durée : 02 heures)

Questions de cours [**8 pts**]

Dans $\mathbf{R^2}$, on définit la fonction $\mathbf{f_a}$ de $\mathbf{R^2}$ dans $\mathbf{R}$ t.q. $\mathbf{f_a}$ $(x_1,x_2) = x_1^2 + a\,x_2^2 - 1$ où **a** est un paramètre réel.

a) Déterminer la dérivée directionnelle d'ordre 1 de $\mathbf{f_a}$ au pt (x_1,x_2) dans une direction quelconque $h=(h_1,h_2) \in \mathbf{R^2}$. (**1pt**)
b) Calculer $\nabla\, \mathbf{f_a}\,(x_1,x_2)$ et montrer par identification avec le résultat de la question a) que $\nabla\, \mathbf{f_a}\,(x_1,x_2)$ coïncide avec $\mathbf{f_a}'(x_1,x_2)$. (**1pt**)
c) Trouver l'expression de la forme bilinéaire $\mathbf{f_a}''(x_1,x_2)$ représentant la dérivée directionnelle d'ordre 2 de $\mathbf{f_a}$ au point (x_1,x_2) .(**1pt**)
d) Utilisant la caractérisation de la convexité d'une fonction par la dérivée directionnelle seconde $\mathbf{f_a}''(x_1,x_2)$ (Voir *Rappel2* au verso de cette page), montrer que si $\mathbf{a} \geq 0$ alors $\mathbf{f_a}$ est convexe. (**1pt**)
e) De même et pour la stricte convexité de $\mathbf{f_a}$, utiliser la caractérisation du *rappel2* afin de montrer que si $\mathbf{a} > 0$ alors $\mathbf{f_a}$ est strictement convexe. (**0.5pt**)
f) Calculer la matrice hessienne de $\mathbf{f_a}$ et vérifier que $\mathbf{f_a}$ est bien convexe <u>si et seulement si</u> $\mathbf{a} \geq 0$. (**1pt**)
g) Utiliser les résultats précédents et le *rappel1* pour montrer que $\mathbf{f_a}$ est strict. convexe $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a} > 0$. (**1pt**)
h) En déduire que le problème de minimisation de $\mathbf{f_a}$ sur $\mathbf{R^2}$ n'admet une solution optimale unique que lorsque $\mathbf{a} > 0$. (**1.5pt**)

Exercice [**12 pts**]

Dans $\mathbf{R^n}$, $\langle\ ,\ \rangle_n$ désigne le produit scalaire euclidien et on considère la matrice carrée B d'ordre **n**.

1) Montrer que $\forall\ (x\,,\,y) \in \mathbf{R^n x R^n}$ on a $\langle Bx\,,\,y\rangle_n = \langle x\,,\,B^T y\rangle_n$ et $\langle x\,,\,By\rangle_n = \langle B^T x\,,\,y\rangle_n$. (**1pt**)

2) On introduit alors la fonctionnelle **f** définie sur $\mathbf{R^n}$: $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{2}\|Bx\|_n^2 - \langle c\,,\,x\rangle_n + d$ où $\|\,.\,\|_n$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbf{R^n}$, **c** est un vecteur de $\mathbf{R^n}$ et d un réel.

a) Montrer que **f** peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{2}\langle B^T B x\,,\,x\rangle_n - \langle c\,,\,x\rangle_n + d$. (**0.5pt**)

b) On pose $A = B^T B$. Montrer alors que **f** est une fonctionnelle quadratique. (**0.5pt**)

c) Montrer que A est semi-définie positive et déduire que **f** est convexe. (**1pt**)
Rappel : Dans $\mathbf{R^n}$, pour une fonctionnelle quadratique **f** (voir question 2)-a)), la dérivée directionnelle d'ordre 1 de **f** s'écrit comme suit : $\nabla\, \mathbf{f}(x) = \text{grad}\, \mathbf{f}(x) = Ax - \mathbf{c}$ et $\text{Hess}\mathbf{f}(x) = A$.

d) En précisant un contre-exemple, montrer qu'à ce niveau **f** ne peut être coercive. (**0.5pt**)

e) Montrer que si B est inversible alors A est aussi inversible. (**0.5pt**)
Rappel : B inversible $\Rightarrow B^T$ inversible et son inverse est tout simplement la transposée de B^{-1} .

f) Montrer alors que, dans ce cas (A inv.), A est aussi définie positive. (**0.5pt**)

g) En déduire alors que dans ce cas **f** est coercive. (**1pt**)

h) Dans la suite on suppose A définie positive (B inversible), montrer alors que :
h1) le problème d'optimisation sans contraintes ($\mathbf{P_n}$) : $\min_{x \in R^n} f(x)$ admet une solution unique (sans la déterminer) notée x*. (**0.5pt**)

h2) ''résoudre le problème ($\mathbf{P_n}$)'' revient à ''résoudre le système linéaire $Bx = \mathbf{c'}$ '' où $\mathbf{c'}$ est un vecteur de $\mathbf{R^n}$ qu'il faudra préciser (ici il faut, tout simplement, montrer l'équivalence suivante : x* solution optimale de ($\mathbf{P_n}$) $\Leftrightarrow$ x* vecteur-solution du système linéaire $Bx = \mathbf{c'}$). (**0.5pt**)

h3) Résoudre alors le problème ($\mathbf{P_n}$) en explicitant x* en fonction des données du problème initial c.àd. en fonction de la matrice B, du vecteur **c** et éventuellement du scalaire d. (**0.5pt**)

h4) Calculer la valeur optimale de ($\mathbf{P_n}$) en fonction de ces mêmes données (de **h3)**). (**1pt**)

i) **Application** : Soit à résoudre le problème d'optimisation suivant dans $\mathbf{R^2}$: ($\mathbf{P_2}$) : $\min\limits_{x \in R^2} f(x)$
où $f(x) = f(x_1 , x_2) = 1/2 \,((x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 + x_2)^2) + 2x_1 + 2x_2$ avec $x = (x_1 , x_2) \in \mathbf{R^2}$.

i1) Par identification avec l'expression de la fonction **f** introduite ci-dessus (lorsque n = 2) :

$$\mathbf{f}\,(x) = \frac{1}{2}\|Bx\|_2^2 - \langle c\,,\, x\rangle_2 + d$$

préciser la matrice carrée B d'ordre 2, le vecteur **c** de $\mathbf{R^2}$ et le scalaire d $\in$ **R**. (**2.5pts**)

i2) Après avoir vérifié que B est inversible et en utilisant les résultats précédents, déterminer l'unique solution optimale x* du problème de minimisation ($\mathbf{P_2}$). (**1pt**)

i3) Calculer la valeur optimale de ($\mathbf{P_2}$). (**0.5pt**)

Rappels utiles

Rappel1 : E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert dans E et C convexe inclus ds U, alors si $f : E \to \mathbf{R}$ est une fois dérivable (au sens de la dérivée directionnelle) ds U, on a les résultats suivants :

- **f est convexe sur C** $\Leftrightarrow \forall x, y \in C \ \langle f'(x) - f'(y), x - y\rangle_E \geq 0$.
- **f est strictement convexe sur C** $\Leftrightarrow \forall x, y \in C$ avec $x \neq y \ \langle f'(x) - f'(y), x - y\rangle_E > 0$.

Rappel2 : E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert de E et C convexe inclus dans U, alors si $f : E \to \mathbf{R}$ est deux fois dérivable (au sens de la dérivée directionnelle) ds U, on a les résultats suivants :

- **f est convexe sur C** $\Leftrightarrow \forall x, y \in C \ \ f''(x)(y - x, y - x) \geq 0$.
- Si $\forall x, y \in C$ avec $x \neq y$ on a $f''(x)(y - x, y - x) > 0$ alors **f est strictement convexe**.

Rappel3 : Conditions d'optimalité.
E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert dans E et C convexe fermé inclus dans U, alors si $f : E \to \mathbf{R}$ est **convexe** et une fois dérivable (au sens de la dérivée directionnelle) dans U, une condition nécessaire est suffisante pour que x $\in$ C soit solution optimale du problème d'optimisation : $\inf\limits_{y \in C} f(y)$ est : $\forall y \in C \ \langle f'(x), y - x\rangle_E \geq 0$. C'est l'inéquation d'Euler.
Dans le cas sans contraintes (C = U = E), une condition nécessaire est suffisante pour que x $\in$ E soit solution optimale du problème d'optimisation **sans** contraintes : $\inf\limits_{y \in E} f(y)$ est : $f'(x) = 0_E$. C'est l'équation d'Euler.

Rappel4 : Coercivité et optimalité.
E étant un R-esp. normé de dimension finie, si $f : E \to \mathbf{R}$ est **continue** et **coercive** (c'est-à-dire $\lim\limits_{\|x\|_E \to \infty} f(x) = +\infty$), alors la fonction f admet au moins un minimum sur E.
Si de plus f est **strictement convexe** alors ce minimum est unique.

Université Abou Bekr Belkaid
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2016/17
Avril 2017
Optim. sans contraintes L3/S5

Corrigé de l'épreuve de rattrapage

Questions de Cours

$f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q. $f_a(x_1, x_2) = x_1^2 + a x_2^2 - 1$ où $a \in \mathbb{R}$.

→ a) $\langle f_a'(x_1,x_2), (h_1,h_2)\rangle_2 = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[f(x_1+th_1, x_2+th_2) - f(x_1,x_2)\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[(x_1+th_1)^2 + a(x_2+th_2)^2 - 1 - x_1^2 - a x_2^2 + 1\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[x_1^2 + t^2h_1^2 + 2tx_1h_1 + ax_2^2 + at^2h_2^2 + 2atx_2h_2 - x_1^2 - ax_2^2\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[t^2h_1^2 + 2tx_1h_1 + at^2h_2^2 + 2atx_2h_2\right] = 2x_1h_1 + 2ax_2h_2$

$= 2(x_1, ax_2)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix} = 2\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ ax_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}\right\rangle_2 \quad \forall (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$

→ b) $\frac{\partial f_a}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_2} = 2ax_2 \Rightarrow \nabla f_a(x_1,x_2) = (2x_1, 2ax_2)^T = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ ax_2\end{pmatrix}$

On en déduit, d'après a), que $f_a'(x_1,x_2) = \nabla f_a(x_1,x_2)$

→ c) Posant $g(x_1,x_2) = \langle f_a'(x_1,x_2), (h_1,h_2)\rangle = 2x_1h_1 + 2ax_2h_2$, on obtient alors $f_a''(x_1,x_2)(h,k) := \langle g'(x_1,x_2), k\rangle_2$ où $h = (h_1,h_2)$ et $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2$

Or $\langle g'(x_1,x_2), (k_1,k_2)\rangle_2 = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[g(x_1+tk_1, x_2+tk_2) - g(x_1,x_2)\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[2(x_1+tk_1)h_1 + 2a(x_2+tk_2)h_2 - 2x_1h_1 - 2ax_2h_2\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[2x_1h_1 + 2tk_1h_1 + 2ax_2h_2 + 2atk_2h_2 - 2x_1h_1 - 2ax_2h_2\right]$

$= 2k_1h_1 + 2ak_2h_2 = 2(h_1k_1 + ah_2k_2) = f_a''(x_1,x_2)(h,k)$

→ d) f_a convexe sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^2\ f_a''(x)(y-x, y-x) \geq 0$

où $x = (x_1,x_2)^T$ et $y = (y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ $\quad y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)^T = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$f_a''(x_1,x_2)\left(\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2\end{pmatrix}\right) = 2\left[(y_1-x_1)(y_1-x_1) + a(y_2-x_2)(y_2-x_2)\right]$

$= 2\left((y_1-x_1)^2 + a(y_2-x_2)^2\right)$

Il est alors clair que si $a \geq 0$ alors $f_a''(x)(y-x, y-x) \geq 0 \Rightarrow f_a$ convexe

→ e) $a > 0 \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ t.q. $x \neq y$ $f_a''(x)(y-x, y-x) = 2\left((y_1-x_1)^2 + a(y_2-x_2)^2\right) > 0$

$\Rightarrow f_a$ strict. convexe sur $\mathbb{R}^2$ puisque $x \neq y \Leftrightarrow x_1 \neq y_1$ ou $x_2 \neq y_2$

Suite des questions de Cours

→ f) On a déjà calculé $\frac{\partial f_a}{\partial x_1} = 2x_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_1^2} = 2$ et $\frac{\partial f_a}{\partial x_2} = 2ax_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_2^2} = 2a$

et puis $\frac{\partial^2 f_a}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$ Donc $\text{Hess} f_a(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 2 > 0$ et $\lambda_2 = 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$

Donc f_a convexe $\Leftrightarrow a \geq 0$ (car, ds ce cas, les valeurs propres de $\text{Hess} f_a$ sont réelles positives ou nulles).

→ g) Tout d'abord, d'après la question e) : $a > 0 \Rightarrow f_a$ strict. convexe

Reste à montrer f_a strict. convexe $\Rightarrow a > 0$:

f_a strict. convexe $\Rightarrow f_a$ convexe (cond. nécessaire de strict-convexité)

$\Rightarrow a \geq 0$ (d'après f)). Donc il reste à montrer que f_a strict. conv. $\Rightarrow a \neq 0$

Ce qui équivaut à montrer que $a = 0 \Rightarrow f_a$ pas strict. convexe (c'est un raisonnement par la contraposée : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$) :

Lorsque $a = 0$ f_0 s'écrit comme suit : $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 - 1$ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

D'après le rappel 1 : f_0 strict. convexe sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$ avec $X \neq Y$

où $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ $\qquad \langle f_0'(X) - f_0'(Y), X - Y \rangle_2 > 0$

$f_0'(X) = f_0'(x_1, x_2) = \nabla f_0(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \right)^T = (2x_1, 0)^T$

De même $f_0'(Y) = (2y_1, 0)^T$. On choisit donc $\bar{X} = (0, 0)^T$ et $\bar{Y} = (0, \underbrace{y_2}_{\neq 0})^T$

avec $y_2 \neq 0$. Ds ce cas $\bar{X} \neq \bar{Y}$ et on a :

$$\langle f_0'(\bar{X}) - f_0'(\bar{Y}), \bar{X} - \bar{Y} \rangle_2 = \langle f_0'(0,0) - f_0'(0, y_2), (0-0, 0-y_2)^T \rangle_2$$
$$= \langle (0,0)^T - (0,0)^T, (0, -y_2)^T \rangle_2 = \langle (0,0)^T, (0, -y_2)^T \rangle_2 = 0$$

$\Rightarrow f_0$ n'est pas strict. convexe. $\qquad \forall y_2 \neq 0$

→ h) En effet, lorsque $a > 0$ f_a est coercive puisque

$f_a(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^2 - 1 \geq \min(1, a)(x_1^2 + x_2^2) - 1 = \min(1, a) \|(x_1, x_2)^T\|_2^2 - 1$

où $\|(x_1, x_2)^T\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ $\qquad \to +\infty$ lorsque $\|(x_1, x_2)^T\|_2 \to \infty$

f_a est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$ puisque c'est 1 polynôme à 2 variables : x_1 & x_2

Donc d'après le rappel 4, f_a admet au moins un minimum (sol. optimale) sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque, de plus, f_a est strict.-convexe lorsque $a > 0$ alors ce minimum est unique c.à.d. le pb de minimisation : $\min_{x \in \mathbb{R}^2} f_a(x)$ admet 1 seule sol. optimale.

Exercice

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\langle Bx, y \rangle_n = (Bx)^T y = x^T (B^T y) = \langle x, B^T y \rangle_n$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\langle x, By \rangle_n = x^T (By) = x^T (B^T)^T y = (B^T x)^T y = \langle B^T x, y \rangle_n$

où l'on rappelle que $(CD)^T = D^T C^T$

2) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\|Bx\|_n^2 - \langle c, x\rangle_n + d = \frac{1}{2}\langle Bx, Bx\rangle_n - \langle c, x\rangle_n + d$ $\quad c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$

→ a) D'après 1) $\langle Bx, Bx\rangle_n = \langle B^T B x, x\rangle_n$ d'où le résultat.

→ b) On pose $A = B^T B$. f est quadratique ssi A est symétrique

or $A^T = (B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B = A \Rightarrow A$ sym. $\Rightarrow f$ quadratique

0,25pt pour quelqu'un qui dit que A sym. mais ne le montre pas

→ c) A est semi-déf. positive ssi, par définition, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x^T A x = \langle Ax, x\rangle_n$ $= \langle x, Ax\rangle_n \geq 0$ A étant sym.

On se rappelle alors que $\langle Ax, x\rangle_n = \langle B^T B x, x\rangle_n = \langle Bx, Bx\rangle_n = \|Bx\|_n^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (0.5pt)

On en déduit que f est convexe puisque Hess $f(x) = A$ est semi-définie positive (0.5pt)

→ d) Si A est la matrice nulle (symétrique et semi-déf. positive) alors f est une fonction affine sur $\mathbb{R}^n$: $f(x) = -\langle c, x\rangle_n + d$ qui ne peut être coercive puisque $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d$ $\quad c_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = \overline{1,n}$

$\|x\|_n \to \infty \Rightarrow \exists$ au moins $x_{i_0} \to \pm\infty$. Supposons $x_{i_0} \to +\infty$ et lui correspond $c_{i_0} > 0$

Ds ce cas $f(x) \to -\infty$ et $x_{j_0} \to -\infty$ et lui correspond $c_{j_0} < 0$ alors ds ce cas aussi $f(x) \to -\infty$

→ e) B inversible ⇒ $A = B^T B$ inversible puisque $A^{-1} = (B^T B)^{-1}$ $= B^{-1}(B^T)^{-1}$ $= B^{-1}(B^{-1})^T$

puisqu'en général, le produit de 2 matrices inversibles est inversible

→ f) A étant inversible et semi-définie positive alors ttes ses valeurs propres sont réelles et strict. positives car si l'une des valeurs propres est nulle alors $\det(A) = 0$ et A serait singulière. On en conclut alors que A est déf.-positive.

→ g) A étant définie-positive, f est alors coercive puisque, ds ce cas, f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - \langle c, x\rangle_n + d \geq \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - \alpha\|c\|_n\|x\|_n + d$

où $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle_n$ $\qquad = \|x\|_A\left(\frac{1}{2}\|x\|_A - \alpha\|c\|_n\right) + d \longrightarrow +\infty$ qd $\|x\|_A \to \infty$

et α est l'une des constantes d'équivalence entre $\|\cdot\|_A$ et $\|\cdot\|_n$

→ h) La matrice A étant définie-positive ⇒ f strict. convexe

h1) Pour que (P_n) : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ admette une sol. opt. unique, il suffit que f soit continue (par rapport à la norme euclidienne $\|\cdot\|_n$ par exple), coercive et strict. convexe (Voir Rappel 4). Ce qui est le cas pour f : pge 4

Suite de la question $h1)$ de l'exercice :

On a déjà vu que f était coercive et strict. convexe. Pour la continuité de f il suffit de remarquer que c'est une somme de fonctions continues : $x \mapsto \frac{1}{2}\|Bx\|_n^2$ (polynôme du 2nd degré à n variables), $x \mapsto -\langle c, x\rangle_n$ (application ou forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$) et $x \mapsto d$ (fonction constante)

$h2)$ On note par x^* la sol. opt. unique de (P_n) et on montre que x^* sol. unique de $Bx = c'$. En effet, x^* vérifie l'équation d'Euler

$f'(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow Ax^* - c = 0_n \Leftrightarrow Ax^* = c$

$\Leftrightarrow B^TBx^* = c \Leftrightarrow Bx^* = (B^T)^{-1}c = (B^{-1})^Tc = c'$

Inversement si x^* sol. de $Bx = c' = (B^{-1})^Tc$ c.à.d. si $Bx^* = c'$ alors c'est équivalent d'écrire $Ax^* - c = 0_n \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0_n$

$\Rightarrow x^*$ sol. opt. de (P_n) car f convexe puisqu'elle est strict. conv.

$h3)$ $Bx^* = (B^{-1})^Tc \Leftrightarrow x^* = B^{-1}(B^{-1})^Tc$ (0.25 seulement pour $x^* = A^{-1}c = (B^TB)^{-1}c$)

$h4)$ La valeur optimale est
$$f(x^*) = \frac{1}{2}\|Bx^*\|_n^2 - \langle c, x^*\rangle_n + d$$
$$= \frac{1}{2}\|BB^{-1}(B^{-1})^Tc\|_n^2 - \langle c, B^{-1}(B^{-1})^Tc\rangle_n + d$$
$$= \frac{1}{2}\|(B^{-1})^Tc\|_n^2 - \langle c, B^{-1}(B^{-1})^Tc\rangle_n + d$$
$$= (-1/2)\langle c, B^{-1}(B^{-1})^Tc\rangle_n + d$$

$i)$ Application : (P_2) : $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$

où $f(x) = f(x_1, x_2) =$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1+2x_2)^2 + (2x_1+x_2)^2\right] + 2x_1 + 2x_2 \quad \text{avec } x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$
$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+x_2\end{pmatrix}\right\|_2^2 - (-2x_1 - 2x_2) = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\|_2^2 - \left\langle\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\rangle_2 + 0$$

$i1)$ Il est clair alors que, par identification avec l'expression de la fction f lorsque $n=2$, la matrice $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, le vecteur $c = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $d = 0$

$i2)$ $\det B = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow B$ inversible $B^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ \alpha & \gamma\end{pmatrix}$ $\quad B^{-1}B = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ \alpha & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 1 \end{cases}$

$0 + 3b = 2 \qquad 0 + 3\gamma = -1$

$b = 2/3 \Rightarrow a = -b/2 = -\frac{1}{2}(2/3) = -1/3$

$\gamma = -1/3 \Rightarrow \alpha = -2\gamma = -2(-1/3) = 2/3$

$B^{-1} = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}$ Vérif. $B^{-1}B = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

D'après $h3)$ $x^* = B^{-1}(B^{-1})^Tc = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}5/9 & -4/9\\ -4/9 & 5/9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

Donc $x^* = (-2/9, -2/9)^T$

$i3)$ D'après $h4)$ $f(x^*) = f(-2/9, -2/9) = \frac{1}{2}\|(B^{-1})^Tc\|_2^2 - \langle c, x^*\rangle_2 + d$ où $d = 0$

Donc $f(x^*) = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right\|_2^2 - \left\langle\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2/9\\-2/9\end{pmatrix}\right\rangle_2 = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\end{pmatrix}\right\|_2^2 - \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right)$

$= \frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\end{pmatrix}\right\rangle_2 - \frac{8}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right) - \frac{8}{9} = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}.$

$B^{-1} = \begin{bmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{bmatrix}$ et $c = (-2, -2)^T$