Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^e Année Licence - S5 — Avril 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen de Rattrapage — 1H45

Exercice 1(6pts): *Soit E un espace de Hilbert dont le produit scalaire est noté par $\langle .,. \rangle$ et la norme associée est $\|.\|$. Soient F un sous espace vectoriel propre et fermé de E et $P: E \to F$ le projecteur orthogonal sur F.*

1. *Montrer que l'application P est linéaire et continue de norme 1.*
2. *Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$ et $Ker\ P = F^{\perp}$.*

Exercice 2(8pts): *Soit $H = \left\{f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\ mesurable;\ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx < +\infty\right\}$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$.*

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}\, x^n\right) \quad et \quad P_n(x) = x^n.$$

1. *En utilisant la formule de Leibniz, montrer que L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n/n!$.*
2. *Montrer que $\langle P_n, \mathbf{1} \rangle = n!$ et en déduire que $\mathbb{R}[X] \subset H$.*
3. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que*

$$\langle P_k\,,\, L_n \rangle = \begin{cases} (-1)^n\, n! & si\ n = k \\ 0 & si\ n > k. \end{cases}$$

En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H.

4. *$\mathbb{R}[X]$ étant dense dans H, montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.*
5. *Calculer L_3 et en déduire*

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\, e^{-x} dx.$$

Exercice 3(6pts): *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique donnée sur $[0,\ 2\pi[$ par $f(x) = \pi - x$. En déduire que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bon Courage

Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3e Année Licence - S5 — Avril 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen de Rattrapage — 1H45

Corrigé

Exercice 1(6pts): *E est un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de norme associée $\|.\|$. $F \subset E$, sous espace vectoriel propre et fermé. $P: E \to F$ le projecteur orthogonal sur F.*

1. *Montrons que P est linéaire :* **(1 pt)**

   On a pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tous $x, y \in E$ et $z \in F$:

   $$\langle x - P(x), z\rangle = 0, \quad et \ \langle \alpha y - \alpha P(y), z\rangle = 0 \ \ (car \ \langle y - P(y), z\rangle = 0).$$

   D'où par addition

   $$\langle x + \alpha y - P(x) - \alpha P(y), z\rangle = 0 \quad (a)$$

   D'autre part

   $$\langle x + \alpha y - P(x + \alpha y), z\rangle = 0 \quad i.e.\ \langle P(x + \alpha y) - (x + \alpha y),\ z\rangle = 0. \quad (b)$$

   En additionnant (a) et (b) on obtient

   $$\langle P(x + \alpha y) - P(x) - \alpha P(y), z \ \rangle = 0, \forall z \in F$$

   et puisque $P(x + \alpha y) - P(x) - \alpha P(y) \in F$ (car c'est un s.-e.v. de E) alors,

   $$P(x + \alpha y) - P(x) - \alpha P(y) = 0$$

   (le seul vecteur de F orthogonal à tous les vecteurs de F est le vecteur nul !)

   On conclut que $P(x + \alpha y) = P(x) + \alpha P(y),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$.

   Ainsi P est linéaire.

   - *Montrons que P est continue.* **(1 pt)**

   Soit $x \in E$ alors $\langle x - P(x), y\rangle = 0, \forall y \in F$.

   En particulier pour $y = P(x)$ on obtient $\langle x - P(x), P(x)\rangle = 0$.

   Les vecteurs $x - P(x)$ et $P(x)$ sont orthogonaux et le théorème de Pythagore donne, $\|x\|^2 = \|x - P(x)\|^2 + \|P(x)\|^2$ et ceci implique que $\|P(x)\| \leq \|x\|$.

   La continuité de P en découle et on a $\|P\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.

   Pour tout $x \in F$, $\|P(x)\| = \|x\|$ (car $P(x) = x$) d'où $\|P\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$. **(1, 5 pt)**

2. *Montrons que $E = F \oplus F^{\perp}$.* **(1 pt)**

   Soit $x \in E$, alors x peut être écrit sous la forme : $x = P(x) + \big(x - P(x)\big)$

   avec $P(x) \in F$ et $x - P(x) \in F^{\perp}$ et comme $F \cap F^{\perp} = \bar{F} \cap F^{\perp} = \{0\}$

   alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

- *Montrons que* $Ker\ P = F^{\perp}$. **(1,5 pt)**
  a. $Ker\ P \subset F^{\perp}$: *Soit* $x \in Ker\ P$ *alors* $P(x) = 0$.
  D'autre part $\langle x - P(x),\ y\rangle = 0,\ \ \forall y \in F$; *d'où* $\langle x,\ y\rangle = 0,\ \ \forall y \in F$.
  Ainsi $x \in F^{\perp}$ *et* $Ker\ P \subset F^{\perp}$.
  b. $F^{\perp} \subset Ker\ P$: *Soit* $x \in F^{\perp}$. *On a* $\langle x - P(x),\ y\rangle = 0,\ \ \forall y \in F$;
  d'où $\langle x,\ y\rangle - \langle P(x),\ y\rangle = 0,\ \ \forall y \in F$; *or* $\langle x,\ y\rangle = 0$ *car* $x \in F^{\perp}$ *et* $y \in F$.
  Par suite $\langle P(x),\ y\rangle = 0,\ \ \forall y \in F$ *et puisque* $P(x) \in F$ *alors* $P(x) = 0$.
  Donc $x \in Ker\ P$ *et* $F^{\perp} \subset Ker\ P$.
  Conclusion : $Ker\ P = F^{\perp}$.

Exercice 2(8pts): $H = \{f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\ mesurable;\ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx < +\infty\}$

$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx,\ \ L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n),\ \ P_n(x) = x^n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ x \geq 0.$

1. *Montrons que* L_n *est un polynôme de degré n et de coefficient dominant* $(-1)^n/n!$.

   La formule de Leibniz donne: **(1 pt)**

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \frac{e^x}{n!}\sum_{p=0}^{n} C_n^p (x^n)^{(p)}(e^{-x})^{(n-p)}$$

Comme $(e^{-x})^{(n-p)} = (-1)^{n-p}e^{-x}$ *et*

$$(x^n)^{(p)} = n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} = \frac{n!\ x^{n-p}}{(n-p)!}, \qquad (p \leq n)$$

alors

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!} C_n^p\ x^{n-p} = \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} n\, x^{n-1} + \cdots + (-n)x + 1.$$

Ainsi L_n *est un polynôme de degré n et de coefficient dominant* $(-1)^n/n!$.

2. - *Montrons que* $\langle P_n, \mathbf{1}\rangle = n!$. **(2 pts)**

$$\langle P_n, \mathbf{1}\rangle = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

car $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$. *En posant* $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$, *on voit que* $I_n = nI_{n-1}$,
et de proche en proche on obtient, $I_n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1\ I_0 = n!\, I_0$
comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$; *alors* $I_n = n!$ *i.e.* $\langle P_n, \mathbf{1}\rangle = n!$.

- *L'espace* $\mathbb{R}[X]$ *est engendré par les monômes* X^n, $X^n(x) = x^n$.

Comme $\langle X^n,\ X^n\rangle = \int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x}dx = (2n)! < +\infty$ *alors* $X^n \in H,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

et par suite $\mathbb{R}[X] \subset H$.

3. - *Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que* **(2 pts)**

$$\langle P_k\,,\,L_n\rangle = \begin{cases} (-1)^n\,n! & si\ n=k \\ 0 & si\ n>k. \end{cases}$$

$$\langle P_k\,,\,L_n\rangle = \int_0^{+\infty} x^k\,\frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}\,x^n)e^{-x}dx = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^k\,\,(e^{-x}\,x^n)^{(n)}dx,$$

Par n intégrations par parties successives, et en remarquant que la fonction $x \longmapsto xe^{-x}$ ainsi que toutes ses dérivées s'annulent en 0 et tendent vers 0 en $+\infty$, on obtient

$$\langle P_k\,,\,L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty}(x^k)^{(n)}\,e^{-x}\,x^n\,dx$$

Comme $(x^k)^{(n)} = 0\ \ si\ n > k \quad et \quad (x^k)^{(n)} = n!\ \ si\ n = k,$

alors $\langle P_k\,,\,L_n\rangle = 0\ si\ n > k\ \ et\,,$

$$\langle P_n\,,\,L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} n!\,e^{-x}\,x^n\,dx = (-1)^n\langle P_n,\mathbf{1}\rangle = (-1)^n\,n!.$$

- *Vérifions que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H.*
  Calculons $\langle L_m\,,\,L_n\rangle$: L_m étant un polynôme de degré m d'où

$$\langle L_m\,,\,L_n\rangle = \langle\sum_{k=0}^{m} a_k\,X^k\,,\,L_n\rangle = \sum_{k=0}^{m} a_k\,\langle X^k,\,L_n\rangle$$

a. *Si $n > m$ alors $n > k$, pour $k \in \{0,1,\dots,m\}$ et $\langle X^k,\,L_n\rangle = 0$ (d'après ce qui précède).*
b. *Pour $n = m$*

$$\langle L_n\,,\,L_n\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\langle X^k,\,L_n\rangle + a_n\langle X^n,\,L_n\rangle = a_n\langle X^n,\,L_n\rangle$$

D'après la première question $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ et puisque $\langle X^n,\,L_n\rangle = \langle P_n,\,L_n\rangle = (-1)^n\,n!$ alors

$$\langle L_n\,,\,L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}(-1)^n\,n! = 1.$$

Conclusion : $\langle L_m\,,\,L_n\rangle = \delta_n^m$ (symbole de Kronecker) et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H.

4. *Montrons que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H :* **(1 pt)**

La famille $\{X^n;\quad n\in\mathbb{N}\}$ engendre de $\mathbb{R}[X]$ et puisque chaque polynôme L_n

est une combinaison finie de $X^k, k \in \{0,1,\dots n\}$ alors $\{L_n;\quad n\in\mathbb{N}\}$ engendre $\mathbb{R}[X]$.

Donc en notant par $[L_n;\ \ n\in\mathbb{N}\,]$ l'espace engendré par la famille $\{L_n;\quad n\in\mathbb{N}\}$

on a $\overline{[L_n;\ n \in \mathbb{N}\,]} = \overline{\mathbb{R}[X]} = H$ *(car* $\mathbb{R}[X]$ *est dense dans* H *); et par suite* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est totale donc une base hilbertienne de H.*

5. *Calculons* L_3 *:* **(2 *pts*)**
   Il suffit remplacer n par 3 dans l'expression détaillée de L_n *(voir la question 1.)*
$$L_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1.$$
   Calculons $\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\, e^{-x} dx$ *:*
$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\, e^{-x} dx = \min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|^2$$
$$= \min_{Q\in F} \|X^3 - Q\|^2 = d^2(X^3, F\,),$$
   où F *est le sous-espace de* H *engendré par les monômes* X^2*,* X *et 1*
   (F *est le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 de base* $B = \{L_0, L_1\,, L_2\}$ *). De l'expression de* L_3 *on tire*
$$X^3 = -6L_3 + 9X^2 - 18X + 6 = -6L_3 + \alpha_2 L_2 + \alpha_1 L_1 + \alpha_0.$$

   Ceci montre que la projection de X^3 *sur* F *est*
$$P_F(X^3) = 9X^2 - 18X + 6 = \alpha_2 L_2 + \alpha_1 L_1 + \alpha_0,$$
   et par suite $\min_{Q\in F} \|X^3 - Q\|^2 = \|X^3 - P_F(X^3)\|^2 = \|-6L_3\|^2 = \langle -6L_3\,, -6\,L_3\rangle = 36.$

Remarque: *Les coefficients* α_i*,* $i \in \{0, 1, 2\,\}$*, sont donnés par* $\alpha_i = \langle X^3,\ L_i\rangle$*, on trouve* $\alpha_2 = 18$*,* $\alpha_1 = -18$*,* $\alpha_0 = 6$.

Exercice 3(6pts): *Les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur* $[0,\ 2\pi[$ *par* $f(x) = \pi - x$*:* **(2 *pts*)**
$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}(\pi - x)^2\right]_0^{2\pi} = 0,$$
et pour $n \in \mathbb{Z}^*$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{in}(\pi - x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi i n}\int_0^{2\pi} e^{-inx} dx = \frac{1}{in}.$$

Par application de l'identité de Parseval :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2 \quad \textbf{(1 pt)}$$

où

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)^2 dx = -\frac{1}{6\pi}[(\pi - x)^3]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{3} \quad \textbf{(1 pt)}$$

On trouve

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \textbf{(1 pt)}$$