Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^{e} Année Licence - S5 — Janvier 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen Final — 1H45

***Exercice 1*:** *Soit $E = C([a,\ b])$ l'espace des fonctions numériques continues sur $[a,\ b]$ ($a < b$), muni du produit scalaire de l'espace $H = L^2([a, b\,])$*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

On considère la forme linéaire

$$L: E \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f \longmapsto L(f) = \int_a^c f(x)dx,$$

où c est un réel fixé de l'intervalle $]a,\ b[$.

1. *Montrer que la forme linéaire L est continue.*
2. *Montrer qu'il n'existe aucun élément $g \in E$ tel que,*
$$L(f) = \langle f, g\rangle \quad \forall f \in E\ \ .$$
3. *Conclure.*
4. *On suppose maintenant que la forme linéaire L est définie sur H.*
   a. *Montrer qu'il existe un unique élément $h \in H$ tel que*
   $$\forall f \in H,\ \ L(f) = \langle f, h\rangle.$$
   b. *Déterminer explicitement h.*

***Exercice 2*:** *Soient $\Omega =]0,\ 1[$ et $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\quad v' \in L^2(\Omega)\}.$$

On rappelle que la fonction v' est la dérivée de v au sens faible, elle désigne la fonction $g \in L^2(\Omega)$ vérifiant, $\int_0^1 v(x)\,\varphi'(x)dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx,\quad \forall\varphi \in C_c^1(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle v, w\rangle = \int_0^1 v(x)\,w(x)dx + \int_0^1 v'(x)\,w'(x)dx.$$

La norme associée est donnée par: $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

1. *Soit $F = \{v \in H^1(\Omega),\ v(1) = 0\}$*
   a. *Expliquer l'existence de $v(1)$.*
   b. *Montrer que F est un sous-espace de Hilbert de $H^1(\Omega)$.*
2. *Soit $(\mathcal{P})$ le problème suivant:*
$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad sur\ \ ]0,\ 1[\\ u(0) = u'(0), \quad u(1) = 0. \end{cases}$$
   où $f \in L^2(\Omega)$.
   a. *Montrer que la solution u de $(\mathcal{P})$ vérifie l'équation variationnelle $(\mathcal{V})$ suivante:*
   $$\forall v \in F,\ \ u(0)v(0)\ + \int_0^1 \big(u'(x)v'(x)\ + u(x)v(x)\big)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$
   b. *Soit $v \in F$, en écrivant $v(0) = \int_1^0 v'(x)\,dx$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $|v(0)| \leq \|v\|_{H^1}$.*
   c. *Montrer que la forme bilinéaire symétrique $\mathcal{B}$ définie sur $F \times F$ par*
   $$\mathcal{B}(u,\ v) = u(0)v(0)\ + \int_0^1 \big(u'(x)v'(x)\ + u(x)v(x)\big)\,dx$$
   est continue et coercive.
   d. *En déduire que l'équation variationnelle $(\mathcal{V})$ admet une unique solution $u \in F$.*

Exercice 3 **:**

Soit H un espace de Hilbert (ou de Banach) et $T: H \longrightarrow H$ un opérateur continu.
On note T^n le produit de composition $T \circ T \circ \ldots \circ T$, n fois.

1. *Montrer par récurrence sur l'entier naturel n que, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.*
2. *On suppose que $\|T\| < 1$.*
   Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} T^n$ est normalement convergente.
   En déduire que l'opérateur $I - T$ est inversible et que
$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$
3. *Soit $H = L^2([0, \ 1])$, on définit T par :*
$$T: \ H \longrightarrow H, \qquad Tf(x) = \int_0^x (x-t)\, f(t)dt.$$

a. *Montrer que $\|T\| < 1$ et pour $n \geq 1$ et $f \in H$,*
$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, f(t)dt.$$

b. *Résoudre l'équation intégrale de l'inconnue $f \in H$:*
$$f(x) = e^x + \int_0^x (x-t)\, f(t)dt.$$

On donne :
$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Barème: *Exercice 1: 6 pts* *Exercice 2: 7 pts* *Exercice 3: 7pts*

Bon Courage

Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3^e Année Licence - S5 Janvier 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne Examen Final 1H45

Corrigé

Exercice 1: $E = C([a, \ b])$, $H = L^2([a,b])$,

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \qquad \|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Commençons par ***la 4ᵉ question*** *:*

$$L: H \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ f \longmapsto L(f) = \int_a^c f(x)dx,$$

Montrons d'abord que la forme linéaire L est continue : $(\mathbf{1\ pt})$

Pour tout $f \in H$, *on a* $|L(f)| = \left|\int_a^c f(x)dx\right| \leq \int_a^c |f(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx = \langle \mathbf{1}, |f|\rangle$,

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|L(f)| \leq \|\mathbf{1}\|\|f\| = \sqrt{b-a}\|f\|$.

Ce qui montre que la forme linéaire est continue sur H.

a. $(\mathbf{1\ pt})$ *On sait que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\langle . \ , \ . \rangle$,
et puisque la forme linéaire L est continue, d'après <u>*le théorème de représentation de Riesz*</u>, *il existe un unique* $h \in H$ *tel que :*

$$L(f) = \langle f,h\rangle \quad \forall f \in H.$$

b. $(\mathbf{1,5\ pt})$ *On a*

$$\langle f,h\rangle = \int_a^b f(x)h(x)dx = \int_a^c f(x)h(x)dx + \int_c^b f(x)h(x)dx.$$

Pour avoir $L(f) = \langle f,h\rangle$ *c.-à-d.*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)h(x)dx + \int_c^b f(x)h(x)dx,$$

il suffit de prendre $h = \chi_{[a, \ c]}$,

$$h(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ a \leq x \leq c \\ 0 \ \ si \ \ c \leq x \leq b. \end{cases}$$

Pour la ***1ᵉ question*** *: L définie sur E*

$$L: E \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ f \longmapsto L(f) = \int_a^c f(x)dx,$$

L est évidemment continue sur E car $E \subset H$,

2. $(\mathbf{1,5\ pt})$ *S'il existait un élément* $g \in E$ *vérifiant* $L(f) = \langle f,g\rangle$ *pour tout* $f \in E$, *alors par unicité nous aurions,* $g = h$ *(car* $E \subset H$*).*
Mais h n'est pas continue sur $[a, \ b]$, *donc* $h \notin E$.
Ainsi il n'existe aucun élément $g \in E$ *vérifiant,* $L(f) = \langle f,g\rangle \quad \forall\, f \in E$.

3. $(\mathbf{1\ pt})$ *Conclusion:* $E = C([a, \ b])$ *n'est pas un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* $L^2([a,b])$.

Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3^{e} Année Licence - S5 Janvier 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne Examen Final 1H45

Corrigé

Exercice 2: *Soient* $\Omega =]0,\ 1[$ *et* $H^1(\Omega)$ *l'espace de Sobolev défini par*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\quad v' \in L^2(\Omega)\}.$$

$H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\langle v, w\rangle = \int_0^1 v(x)\, w(x) dx + \int_0^1 v'(x)\, w'(x) dx.$$

La norme associée est: $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

1. *Soit* $F = \{v \in H^1(\Omega),\ v(1) = 0\}$

   a. *Existence de* $v(1)$: *Pour tout* $v \in H^1(\Omega)$, *il existe un unique élément* $\bar{v} \in C(\overline{\Omega})$ *tel que:* $v = \bar{v}$ *p.p. sur* Ω.

   Comme $\bar{v}(1)$ *existe (car* $\bar{v}$ *est continue sur* $[0,\ 1]$ *), on peut parler de* $v(1)$. **(1 pt)**

   b. *Montrons que F est un sous-espace de Hilbert de* $H^1(\Omega)$. **(1, 5 pt)**

   Il suffit de montrer que F est fermé dans $H^1(\Omega)$ *car ce dernier est complet.*

   F est caractérisé par : $\forall v \in H^1(\Omega);\quad v \in F \Leftrightarrow v(1) = 0.$

Considérons la forme linéaire $\varphi: H^1(\Omega) \to \mathbb{R},\ \ v \longmapsto v(1)$.

Montrons que φ *est continue: On a*

$$\varphi(v) = v(1) = \int_0^1 \big(xv(x)\big)' dx = \int_0^1 (v(x) + xv'(x)) dx,$$

d'où

$$|\varphi(v)| \le \int_0^1 |v(x)| dx + \int_0^1 |xv'(x)|\, dx,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$*!), on obtient*

$$|\varphi(v)| \le \|v\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \|v'\|_{L^2} \le \|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2} \le 2\|v\|_{H^1}.$$

Ceci prouve que φ *est continue.*

On a $F = \{v \in H^1(\Omega),\ \varphi(v) = 0\} = Ker\ \varphi$.

Ainsi F est le noyau d'une forme linéaire continue, il est donc fermé et par suite complet car inclus dans espace complet.

4. *Soient* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $(\mathcal{P})$ *le problème suivant:*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad sur\ \ ]0,\ 1[\\ u(0) = u'(0), \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

a. **(1, 5 pt)** *Montrons que la solution u de* $(\mathcal{P})$ *vérifie l'équation variationnelle* $(\mathcal{V})$ *suivante:*

$$\forall v \in F,\ \ u(0)v(0)\ + \int_0^1 \big(u'(x)v'(x)\ + u(x)v(x)\big)\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx.$$

Multiplions l'équation de $(\mathcal{P})$ *par* $v \in F$ *et intégrons (par parties) sur* $[0,\ 1]$:

$$[-u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 u(x)v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x) dx,$$

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 u(x)v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x) dx.$$

De la condition $u(0) = u'(0)$ *et du fait que* $v(1) = 0$ *car* $v \in F$, *on trouve l'équation variationnelle:*

$$u(0)v(0) + \int_0^1 \big(u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\big)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \qquad \forall v \in F.$$

b. **(1 pt)** *Soit* $v \in F$. *Montrons que* $|v(0)| \le \|v\|_{H^1}$.

On a,

$$\int_0^1 v'(x)\,dx = v(1) - v(0) = -v(0), \quad car\ \ v(1) = 0.$$

D'où

$$|v(0)| = \left|\int_0^1 v'(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |v'(x)|\,dx \le \|\mathbf{1}\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} = \|v'\|_{L^2} \le \|v\|_{H^1}.$$

c. Soit $\mathcal{B}$ *la forme bilinéaire symétrique définie sur* $F \times F$ *par*

$$\mathcal{B}(u,\ v) = u(0)v(0) + \int_0^1 \big(u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\big)\,dx$$

- *Montrons que* $\mathcal{B}$ *est continue* **(1,5 pt)** :

Pour tous $u,\ v \in F$ *on a :*

$$|\mathcal{B}(u,\ v)| \le |u(0)v(0)| + \int_0^1 |u'(x)v'(x) + u(x)v(x)|\,dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 |u'(x)v'(x) + u(x)v(x)|\,dx \le \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

Car pour tout $w \in H^1(\Omega)$: $\|w\|_{H^1}^2 = \|w\|_{L^2}^2 + \|w'\|_{L^2}^2 \ge \max\big(\|w\|_{L^2}^2,\ \|w'\|_{L^2}^2\big)$

D'où, $\|w\|_{H^1} \ge \max(\|w\|_{L^2},\ \|w'\|_{L^2})$.

En conclusion :

$$|\mathcal{B}(u,\ v)| \le \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} = 3\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

et la forme bilinéaire $\mathcal{B}$ *est continue.*

Autre méthode: Il suffit de remarquer que $\mathcal{B}(u,\ v) = u(0)v(0) + \langle u, v\rangle$
(où $\langle .,.\rangle$ *est le produit scalaire de* $H^1(\Omega)$ *) et par suite,*

$$|\mathcal{B}(u,\ v)| \le |u(0)v(0)| + |\langle u, v\rangle| \le \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} = 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

- *Montrons que* $\mathcal{B}$ *est coercive* **(0,5 pt)**:

Pour tout $v \in F$ *on a :*

$$\mathcal{B}(v,\ v) = |v(0)|^2 + \int_0^1 \big(|v'(x)|^2 + |v(x)|^2\big)\,dx = |v(0)|^2 + \|v\|_{H^1}^2,$$

D'où: $\mathcal{B}(v,\ v) \ge \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in F.$

$\mathcal{B}$ *est donc coercive.*

d. *Montrons que l'équation* $(\mathcal{V})$ *admet une unique solution* $u \in F$.
On applique le théorème de Lax-Milgram.
Reste à vérifier que la forme linéaire $l: F \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$,
est continue $(\mathbf{0{,}5\ pt})$: *Pour tout* $v \in F$ *on a*

$$|l(v)| \leq \int_0^1 |f(x)v(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$$

Toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites :

- F *est un espace de Hilbert,*
- *la forme bilinéaire symétrique* $\mathcal{B}$ *est ceorcive et continue sur F,*
- *la forme linéaire l est continue sur F.*

Conclusion: D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un seul $u \in F$ *tel que*

$$\mathcal{B}(u,\ v) = l(v), \quad \forall v \in F,$$

C.-à-d. que l'équation variationnelle $(\mathcal{V})$ *admet une unique solution* $u \in F$. $(\mathbf{0{,}5\ pt})$

Exercice 3 :

Soient H un espace de Hilbert (ou de Banach) et $T: H \longrightarrow H$ *un opérateur continu.*
On note T^n *le produit de composition* $T \circ T \circ \ldots \circ T$, *n fois.*

1. $(\mathbf{1{,}5\ pt})$ *Montrons par récurrence sur l'entier naturel n que,* $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Pour $n = 1$: $\|T^1\| = \|T\| = \|T\|^1$
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé on ait* $\|T^n\| \leq \|T\|^n$,
et montrons que $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$.
Pour tout $x \in H$,

$$\|T^{n+1}(x)\|_H = \left\|T\big(T^n(x)\big)\right\|_H \leq \|T\|\|T^n(x)\|_H \quad \text{car } T \text{ est continu}$$

et puisque T^n *est continu on a*

$$\|T^{n+1}(x)\|_H \leq \|T\|\|T^n(x)\|_H \leq \|T\|\|T^n\|\|x\|_H.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\|T^{n+1}(x)\|_H \leq \|T\|\|T^n\|\|x\|_H \leq \|T\|\|T\|^n\|x\|_H = \|T\|^{n+1}\|x\|_H$$

ce qui montre que $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.
Remarque: Pour $n = 0$, *on pose* $T^0 = I$ *et donc* $\|T^0\| = \|I\| = 1 = \|T\|^0$.

2. *On suppose que* $\|T\| < 1$.
Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} T^n$ *est normalement convergente.* $(\mathbf{1\ pt})$
Puisque $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, *la série* $\sum_{n\geq 0}\|T^n\|$ *est majorée par la progression géométrique de raison* $\|T\|$ *et on a*

$$\sum_{n=0}^{n=p}\|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{n=p}\|T\|^n = \frac{1-\|T\|^{p+1}}{1-\|T\|}, \qquad (\ \|T\| \neq 1\ )$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ et utilisant le fait que $\|T\| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n\| \leq \frac{1}{1-\|T\|} \quad ,$$

la série $\sum_{n\geq 0} T^n$ est donc normalement convergente. Soit S sa somme.

On a

$$S = I + T + T^2 + T^3 \ldots = I + T(I + T + T^2 + \cdots) = I + TS$$

et $$S = I + T + T^2 + T^3 \ldots = I + (I + T + T^2 + \cdots)T = I + ST,$$

c.-à-d. $S = I + TS$ *et* $S = I + ST$, *d'où* $(I-T)S = I = S(I-T)$,

ainsi S est inversible et d'inverse $I - T$: **(1 pt)**

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$

3. $H = L^2([0,\ 1])$, $T\colon H \longrightarrow H$, $\quad Tf(x) = \int_0^x (x-t)\, f(t)dt.$

a. *- Montrons que $\|T\| < 1$* **(1 pt)***: Pour tout $f \in H$,*

$$\|Tf\|_H^2 = \int_0^1 \left|\int_0^x (x-t)\, f(t)dt\right|^2 dx \leq \int_0^1 \left|\int_0^1 |1-t|\, |f(t)| dt\right|^2 dx$$

D'où, en se servant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|Tf\|_H^2 \leq \left|\int_0^1 |1-t|\, |f(t)|dt\right|^2 \leq \|f\|_H^2 \int_0^1 |1-t|^2 dt = \frac{1}{3}\|f\|_H^2.$$

Ainsi $\|T\| \leq 3^{-1/2} < 1.$

- *Montrons pour tout entier* $n \geq 1$ *et* $f \in H$,

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, f(t)dt. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Par récurrence sur n : Pour $n = 1$, c'est la définition de T !

Supposons que pour $n \geq 1$ fixé on ait : $\quad T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, f(t)dt$

Et montrons que la propriété reste vraie pour n+1 :

On a

$$T^{n+1}f(x) = T(T^n f)(x) = \int_0^x (x-t)\, T^n f(t)dt = \int_0^x (x-t)\left(\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, f(s)ds\right)dt$$

Faisons intervertir l'ordre dans cette intégrale double ,

$$T^{n+1}f(x) = \int_0^x \left(\int_s^x (x-t)(t-s)^{2n-1}\ dt\right)\frac{f(s)}{(2n-1)!}ds$$

Intégrons par parties :

$$\int_s^x (x-t)(t-s)^{2n-1}\ dt = \left[\frac{1}{2n}(x-t)(t-s)^{2n}\right]_{t=s}^{t=x} + \frac{1}{2n}\int_s^x (t-s)^{2n}\ dt$$
$$= \frac{(x-s)^{2n+1}}{2n(2n+1)}.$$

En remplaçant, on obtient :

$$T^{n+1}f(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{2n+1}}{2n(2n+1)} \frac{f(s)}{(2n-1)!} ds = \int_0^x \frac{(x-s)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(s)ds.$$

La propriété est donc vraie pour $n+1$, *ainsi :*

$$\forall f \in H, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)dt.$$

b. *Résolvons l'équation intégrale de l'inconnue* $f \in H$: **(1,5 pt)**

$$f(x) = e^x + \int_0^x (x-t)\, f(t)dt.$$

Cette équation est équivalente à : $f(x) = e^x + Tf(x)$
Que l'on peut réécrire sous la forme : $(I-T)f(x) = e^x$.
L'opérateur $I - T$ *étant inversible (car* $\|T\| < 1$*), on obtient :* $f(x) = (I-T)^{-1}e^x$.
Ainsi, d'après la question précédente,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n e^x = e^x + \sum_{n=1}^{+\infty} T^n e^x = e^x + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} e^t dt.$$

En raison de la convergence normale (et donc uniforme) de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ *sur* $[0,\ x]$, *on a*

$$f(x) = e^x + \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} e^t dt = \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)e^t\, dt.$$

En intégrant nous obtenons :

$$f(x) = e^x + \frac{xe^x}{2} - \frac{e^x}{4} + \frac{e^{-x}}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)e^x - \frac{\mathrm{sh}x}{2} = (1+x)\frac{e^x}{2} + \frac{\mathrm{ch}x}{2}.$$

Bonne Révision !