Faculté des Sciences
Dept. Mathématiques

Epreuve finale du module : Mesure et integration
Durée 1h30

Exercice1(6 points)

Soit $1 \leq p < +\infty$.Déterminer l'ensemble des réels α, β, γ tels que:
$u_\alpha(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{1+x^{\frac{1}{2}}} \in L^p(R^+)$, $u_\beta(x) = \frac{\sin x}{x^\beta e^x} \in L^p(R^+)$ et
$u_\gamma(x) = \frac{\ln|x|}{|x|^\gamma} \in L^p([-1,1])$.

Exercice2 (4points)

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré et $f : X \to R$ une fonction mesurable. Montrer que si $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ pour $p \geq 1$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} n^p \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) = 0.$$

Exercice3 (10 points)

Soit (X, Σ, μ) un espace mesure et $f : X \to R$ une fonction mesurable telle que $\mu(x \in X : f(x) \neq 0) > 0$. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\varphi(p) = \int_X |f(x)|^p \, d\mu$ et $J = \{p \in [1, +\infty[\ : \varphi(p) < +\infty\}$

1) Soit $p_0 \leq p$ éléments de J . Pour $0 \leq \theta \leq 1$, on pose $p_\theta = \theta p_0 + (1-\theta)p$, montrer que $p_\theta \in J$. (on pourra utiliser l'inégalité de Hölder).

2) Montrer que φ est strictement positive sur J.

3) On suppose qu'il existe $r \in [1, +\infty[$ tel que $f \in L^r(X, \Sigma, \mu) \cap L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, montrer que $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ pour $p \in [r, +\infty[$

4) Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(X,\Sigma,\mu)} \leq \|f\|_\infty .$$

Corrections

Exercice1

Déterminations des nombres α, β, γ pour que les fonctions u_α , u_β , u_γ soient p-intégrables:

$|u_\alpha(x)|^p = \frac{x^{p\alpha} e^{-px}}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^p}$ est équivalente à $x^{p\alpha}$ au voisinage de 0 et à $x^{p\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} e^{-px}$ au voisinage de $+\infty$. Par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p\alpha} e^{-px}}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^p} dx$ est convergente en 0 si $\alpha p + 1 > 0$ i.e. $\alpha > -\frac{1}{p}$. En remarquant que $x^{p\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} e^{-px} =$

$\left(x^{p\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{p}{2}x}\right)e^{-\frac{p}{2}x}$ et que $\lim_{x\to\infty}x^{p\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{p}{2}x}=0$ donc borné au voisinage de $+\infty$ et alors $x^{p\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}e^{-px}\leq ce^{-\frac{p}{2}x}$ ($c>0$) et l'intégrale est convergente.

$|u_\beta(x)|^p=\frac{|\sin x|^p}{x^{p\beta}e^{px}}$ est équivalente à $x^{p(1-\beta)}$ au voisinage de 0 et l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|^p}{x^{p\beta}e^{px}}dx$ converge pour $\beta<1+\frac{1}{p}$. Au voisinage de $+\infty$, ona $\frac{|\sin x|^p}{x^{p\beta}e^{px}}\leq e^{-px}$ et l'intégrale est convergente.

$|u_\gamma(x)|^p=\frac{|\ln|x||^p}{|x|^{p\gamma}}$

Remarquons que la fonction est symétrique et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{|\ln|x||^p}{|x|^{p\gamma}}dx &= 2\int_0^1\frac{|\ln x|^p}{|x|^{p\gamma}}dx=2\int_0^1\frac{\left|\ln\frac{1}{x}\right|^p}{|x|^{p\gamma}}dx\\ &= -2<\int_{+\infty}^{1}y^{p\gamma-2}(\ln y)^p\,dy=2\int_1^{+\infty}y^{p\gamma-2}(\ln y)^p\,dy\\ &\leq 2\int_1^{+\infty}y^{p(\gamma+1)-2}dy=\frac{2}{p(\gamma+1)-1}\left[y^{p(\gamma+1)-1}\right]_1^{+\infty}\end{aligned}$$

qui converge pour $p(\gamma+1)-1<0$ i.e. $\gamma<\frac{1}{p}-1$.

Exercice2

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty}n^p\mu\left(\{x\in X:|f(x)|\geq n\}\right)=0.$$

Notons par $A_n=\{x\in X:|f(x)|\geq n\}$. Nous avons

$$+\infty>\int_X|f(x)|^p\,d\mu\geq\int_{A_n}|f(x)|^p\,d\mu\geq\int_{A_n}n^pd\mu=n^p\mu(A_n).$$

Par ailleurs la suite $\{A_n\}_{n\in N}$ est une suite décroissante de mesurables avec $\mu(A_o)<+\infty$. En posant

$$\lambda(A_n)=\int_{A_n}|f(x)|^p\,d\mu$$

on obtient comme le sait bien une mesure positive (dite de densité $|f(x)|^p$) et on a d'après les propriétés de la mesure que

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\bigcap_{n\in N}A_n)$$

or $\bigcap\limits_{n\in N}A_n=\{x\in X:f(x)=+\infty\}=\phi.$

D'où
$$\lim_{n\to+\infty}\lambda\left(A_n\right)=0.$$
Nous avons aussi
$$\lambda\left(A_n\right)=\int_{A_n}\left|f\left(x\right)\right|^p d\mu\geq\int_{A_n}n^p d\mu=n^p\mu(A_n).$$
Ce qui nous donne
$$\lim_{n\to+\infty}n^p\mu(A_n)=0$$
i.e.
$$\lim_{n\to+\infty}n^p\mu(\{x\in X:\left|f\left(x\right)\right|\geq n\})=0.$$
Exercice3

1) Montrons que pour $0\leq\theta\leq1$, $p_\theta=\theta p_o+(1-\theta)p\in J$.

Remarquons d'abord que si $\theta=0$ ou bien $\theta=1$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $0<\theta<1$.

Puisque $\frac{1}{\frac{1}{\theta}}+\frac{1}{\frac{1}{1-\theta}}=\theta+1-\theta=1$, l'inégalité de Hölder nous donne
$$\begin{aligned}\int_X\left|f(x)\right|^{p_\theta}d\mu &= \int_X\left|f(x)\right|^{\theta p_o}\left|f(x)\right|^{(1-\theta)p}d\mu\\ &\leq \left(\int_X\left|f(x)\right|^{p_o}d\mu\right)^\theta\left(\int_X\left|f\left(x\right)\right|^p d\mu\right)^{1-\theta}\\ &= \left\|f\right\|_{p_o}^{p_o\theta}\left\|f\right\|_p^{p(1-\theta)}<+\infty.\end{aligned}$$
i.e. $p_\theta\in J$.

2) Montrons que $\varphi>0$.

En effet s'il existe $p\in J$ tel que $\varphi\left(p\right)=\int_X\left|f(x)\right|^p d\mu=0$ alors $f\left(x\right)=0\quad\mu-pp.$ pour $x\in X$ i.e. $\mu\left(\{x\in X:f(x)\neq0\}\right)=0$ ce qui contredit l'hypothèse et par conséquent $\varphi>0$.

3) Montrer que $f\in L^p\left(X,\Sigma,\mu\right)$ pour $p\in[r,+\infty[$.

En effet si $f\in L^r\left(X,\Sigma,\mu\right)\cap L^\infty\left(X,\Sigma,\mu\right)$ alors
$$\left|f\left(x\right)\right|^p=\left|f\left(x\right)\right|^r\left|f\left(x\right)\right|^{p-r}\leq\left|f\left(x\right)\right|^r\left\|f\left(x\right)\right\|_\infty^{p-r}\quad\mu\text{-pp.}$$
D'où
$$\left\|f\right\|_p^p=\int_X\left|f\left(x\right)\right|^p d\mu\leq\left\|f\left(x\right)\right\|_\infty^{p-r}\int_X\left|f\left(x\right)\right|^r d\mu=\left\|f\left(x\right)\right\|_\infty^{p-r}\left\|f\right\|_r^r<+\infty \tag{1}$$

i.e. $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$.

4) Montrons que $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f(x)\|_\infty$.

En effet par l'inégalité (1), on a

$$\|f\|_p \leq \|f(x)\|_\infty^{1-\frac{r}{p}} \|f\|_r^{\frac{r}{p}}$$

et en faisant tendre $p \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f(x)\|_\infty .$$