Dept. Mathématiques
Faculté des Sciences
Tlemcen

Contôle continu du module"Mesure et Intégrations"

.

Exercice1

Soit X un ensemble infini non dénombrable. Pour tout A de X, on pose

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que μ est une mesure sur X.

.

Exercice2

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n\in N} \subset \Sigma$. On appelle $\limsup_n A_n = \cap_{n\in N} \cup_{p\geq n} A_p$ et

$\liminf A_n = \cup_{n\in N} \cap_{p\geq n} A_p$. On suppose qu'il existe un $n_o \in N$ tel que

$$\mu\left(\cup_{p\geq n_o} A_p\right) < \infty.$$

Montrer que

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_n A_n\right).$$

.

Exercice3

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_R \sin\left(\frac{x}{n}\right) . \frac{n}{x(1+x^2)} dx.$$

.

Exercice4

a) Soit X un ensemble.

Soient Σ une tribu de X et $A \subset X$.

Montrer que la fonction caractéristique χ_A de A est $\Sigma-$mesurable si et seulement si $A \in \Sigma$.

b) Soit P une partition au plus dénombrable de X et soit Σ la tribu engendrée par P et $f : X \to R$ une fonction sur X. Montrer que si f est constante sur chaque partie $A \in P$ alors f est mesurable.

Corrigé du contrôle "Mesure et Intégration"

Exercice1

Montrons que μ est une mesure.

a) Nous avons $\mu(\phi) = 0$. (ϕ contient 0 élément)

b) Soit $(U_i)_{i \in N}$ une suite dénombrable de parties de X.

Si tous les U_i sont dénombrable alors $\cup_{i \in N} U_i$ est dénombrable et alors $\mu(\cup_{i \in N} U_i) = 0$ et aussi $\sum_{i \in N} \mu(U_i) = 0$ i.e. $\mu(\cup_{i \in N} U_i) = \sum_{i \in N} \mu(U_i)$.

S'il existe un $i_o \in N$ tel que U_{i_o} est infini non dénombrable alors $\cup_{i \in N} U_i$ est non dénombrable et on a: $\mu(\cup_{i \in N} U_i) = +\infty$ et $\sum_{i \in N} \mu(U_i) \geq \mu(U_{i_o}) = +\infty$ i.e. $\mu(\cup_{i \in N} U_i) = \sum_{i \in N} \mu(U_i)$.

μ est une mesure positive.

Remarque:

Nous avons obtenu l'additivité dénombrable sans avoir supposer les U_i deux à deux disjoints.

.

Exercice2

Montrons que

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_n A_n\right).$$

En effet: puisque la suite $\cap_{p \geq n} A_p$ est croissante

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) = \mu\left(\cup_{n \in N} \cap_{p \geq n} A_p\right) = \sup_n \mu\left(\cap_{p \geq n} A_p\right).$$

Par ailleurs, nous avons $\mu(\cap_{p \geq n} A_p) \leq \inf_{p \geq n} \mu(A_p)$. Ce qui permet d'écrire

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \sup_n \inf_{p \geq n} \mu(A_p) = \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n). \tag{1}$$

De même

$$\mu\left(\limsup_n A_n\right) = \mu\left(\cap_n \cup_{p \geq n} A_p\right)$$

et puisque la suite $(\cup_{p \geq n} A_p)_{n \in N}$ est décroissante et il existe un $n_o \in N$ tel que $\mu(\cup_{p \geq n_o} A_p) < +\infty$, on peut écrire

$$\mu\left(\cap_n \cup_{p \geq n} A_p\right) = \lim_n \mu\left(\cup_{p \geq n} A_p\right)$$

$$= \inf_n \mu\left(\cup_{p\geq n} A_p\right) \geq \inf_n \sup_{p\geq n} \mu\left(A_p\right) = \limsup_n \mu\left(A_n\right). \qquad (2)$$

De (1) et (2) , on déduit que:

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \mu\left(A_n\right) \leq \limsup_n \mu A_n \leq \mu\left(\limsup_n A_n\right).$$

.

Exercice3

Pour $n \in N^*$, posons $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right).\frac{n}{x(1+x^2)}$.

f_n étant continue, est mesurable pour la tribu de Borel sur R. En plus et puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, nous avons $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Par ailleurs

$|f_n(x)| \leq \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right| \frac{1}{(1+x^2)} \leq \frac{1}{(1+x^2)}$ avec $\int_R \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\left[\arctan(x)\right]_0^{\infty} = \pi$.

On applique le théorème de la convergence et on obtient:

$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n(x)\,dx = \int_R \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_R \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

.

Exercice4

a) Montrons que la fonction caractéristique χ_A d'un ensemble A est mesurable ssi A est mesurable.

En effet, $\forall a \in R$, $\chi_A^{-1}\left(]a,+\infty[\right) = \{x \in X : \chi_A(x) > a\} = \left\{\begin{array}{ll} X & \text{si } a < 0 \\ A & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ \phi & \text{si } a \geq 1 \end{array}\right.$.

Ce qui montre que χ_A est $\Sigma-$mesurable ssi $A \in \Sigma$.

b) Montrons à présent que si f est constante sur chaque $A \in P$ alors f est mesurable.

En effet, si α_i est la valeur de f sur $A_i \in P$ alors f s'écrit sous la forme:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \chi_{A_i}$$

alors

$$f = \lim_{N\to+\infty} f_N$$

où $f_N = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$.

Puisque d'après la question a) f_N est mesurable (combinaison finie de fonctions mesurables) alors f ,qui est limite simple de fonctions mesurables, est mesurable.