Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2016/2017.
Novembre 2016.
Optimisation sans contraintes. (L3-S5)

Epreuve de contrôle continu

(durée : 01 h 45 mn)

Questions de cours [**12 pts**]

E étant un **R**_espace vectoriel, l et l_i (i = 1,…,n) des formes linéaires de E dans **R** et enfin c et c_i (i = 1,…,n) des constantes réelles alors :

1) Montrer que le sous-ensemble $K_1 = \{x \in E / l(x) = c\}$ est convexe dans E. (**1pt**)

2) Montrer que le sous-ensemble $K_2 = \{x \in E / l(x) \leq c\}$ est convexe dans E. (**1pt**)

3) Le sous-ensemble $K_3 = \{x \in E / l(x) < c\}$ est-il convexe dans E ? Justifier (**1pt**)

4) Le sous-ensemble $K_4 = \{x \in E / l(x) \geq c\}$ est-il convexe dans E ? Justifier (**1pt**)
   Rappel : Si l est une forme linéaire sur E alors λl l'est aussi $\forall \lambda \in$ **R***.

5) Montrer que le sous-ensemble $S_n = \{x \in E / l_1(x) \leq c_1 \text{ et ... et } l_n(x) \leq c_n\}$ est convexe dans E. (**1pt**)

6) Montrer que, dans $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ (à valeurs dans **R**) est convexe si et seulement si sa matrice hessienne Hess (f(x)) est semi-définie positive. (**1pt**)
7) Montrer que si une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ (à valeurs dans **R**) a une matrice hessienne Hess(f(x)) définie positive alors la fonction est strictement convexe. (**1pt**)

8) Montrer qu'une application affine de E dans **R** est convexe. (**1pt**)
   Rappel : f : E $\rightarrow$ **R** affine $\Leftrightarrow$ $\exists$ l : E $\rightarrow$ **R** linéaire et b $\in$ **R** tel que f(x) = l(x) + b.

9) Etant donnée la fonction g de **R** dans **R** définie par : $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

   a) Montrer que g n'est pas convexe sur **R**. *Indication* : Utiliser l'épigraphe. (**1pt**)
   b) Déterminer CO(g) graphiquement puis préciser son expression en fonction de x. (**1pt**)

10) Montrer que la fonction j de **R** dans **R** définie par j(x) = $(x+a)^2$ où a est un réel fixé, est convexe. (**1pt**)
    Est-elle strictement convexe ? Justifier. (**1pt**)

Exercice [**08pts**]

Etant donnée la fonction ''produit scalaire'' :

$$\begin{aligned} p : R^n \times R^n &\rightarrow R \quad (n \in N^*) \\ (x , y) &\rightarrow p(x , y) = \langle x , y \rangle_n \end{aligned}$$

où $\langle x , y \rangle_n$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

1) Calculer la dérivée directionnelle d'ordre 1 de la fonction p au point (x , y)$\in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}x\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ dans la direction (u , v)$\in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}x\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. (**2pts**)
2) Calculer la dérivée directionnelle d'ordre 2 de la fonction p au point (x , y)$\in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}x\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ dans la direction (u' , v')$\in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}x\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. (**2pts**)
3) Utilisant les calculs de la question 2), montrer que p n'est pas convexe sur $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$x$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. (**1.5pt**)
4) La fonction p est-elle strictement convexe sur $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$x$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$? (**0.5pt**)
5) Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, on pose **q**(x) = p(x , x) pour tout x de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, montrer que **q** est convexe sur $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. (**1pt**)
6) **q** est-elle strictement convexe sur $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$? justifier. (**1pt**)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2016/2017.
Novembre 2016
Optimisation sans contraintes (L3/S5)

Corrigé de l'épreuve de C.C.

Questions de Cours

1) $K_1 = \{x \in E / \ell(x) = c\}$ où E $\mathbb{R}$-esp. vect. et $\ell : E \to \mathbb{R}$ linéaire ($c \in \mathbb{R}$)
$x, y \in K_1$. A-t-on $\forall \lambda \in [0,1]$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in K_1$? $x, y \in K_1 \Rightarrow \ell(x) = \ell(y) = c$
$\ell(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda \ell(x) + (1-\lambda)\ell(y) = \lambda c + (1-\lambda)c = c \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K_1 \Rightarrow K_1 \underset{conv.}{\subset} E$

2) $K_2 = \{x \in E / \ell(x) \leq c\}$ $x, y \in K_2$, a-t-on $\forall \lambda \in [0,1]$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in K_2$?
$x, y \in K_2 \Rightarrow \ell(x) \leq c$ et $\ell(y) \leq c \Rightarrow \lambda \ell(x) \leq \lambda c$ et $(1-\lambda)\ell(y) \leq (1-\lambda) c$ $\forall \lambda \in [0,1]$
$\Rightarrow \ell(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda \ell(x) + (1-\lambda)\ell(y) \leq \lambda c + (1-\lambda) c = c \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K_2 \Rightarrow K_2 \underset{conv.}{\subset} E$

3) $K_3 = \{x \in E / \ell(x) < c\} = \mathrm{int}(K_2) = \overset{\circ}{K_2}$ et on sait que l'intérieur d'1 convexe est un convexe or K_2 convexe de $E \Rightarrow K_3 \underset{conv.}{\subset} E$
OU BIEN procéder comme dans 2) $x, y \in K_3$ a-t-on $\lambda x + (1-\lambda y) \in K_3$ $\forall \lambda \in [0,1]$?
Si $\lambda = 0$ alors $0x + (1-0)y = y \in K_3$. Donc on prend $\lambda \in]0,1[$ et on m.q. $\lambda x + (1-\lambda) y \in K_3$
$\lambda = 1$ alors $x + (1-1)y = x \in K_3$
$x, y \in K_3 \Rightarrow \ell(x) < c$ et $\ell(y) < c \Rightarrow \lambda \ell(x) < \lambda c$ (car $\lambda > 0$) et $(1-\lambda)\ell(y) < (1-\lambda) c$ car $1-\lambda > 0$
Donc $\ell(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda \ell(x) + (1-\lambda)\ell(y) < \lambda c + (1-\lambda) c = c \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K_3 \Rightarrow K_3$ convexe

4) $K_4 = \{x \in E / \ell(x) \geq c\} = \{x \in E / -\ell(x) \leq -c\} \underset{c^- = -c}{\overset{\ell^- = -\ell}{=}} \{x \in E / \ell^-(x) \leq c^-\}$ convexe de E
car $\ell : E \to \mathbb{R}$ lin. $\Rightarrow \ell^- = -\ell : E \to \mathbb{R}$ lin. et $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c^- = -c \in \mathbb{R}$ et on utilise le résultat de 2)
OU BIEN on fait le m raisonnement que pour 2) en changeant "$\leq$" par "$\geq$".

5) $S_n = \{x \in E / \ell_1(x) \leq c_1$ et ... et $\ell_n(x) \leq c_n\} = \{x \in E / \ell_1(x) \leq c_1\} \cap \dots \cap \{x \in E / \ell_n(x) \leq c_n\}$
$= \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in E / \ell_i(x) \leq c_i\}$ où $\ell_i : E \to \mathbb{R}$ lin. pour $i = \overline{1,n}$ et $c_i \in \mathbb{R}$ $i = \overline{1,n}$
Donc S_n est une intersection de s/ensembles convexes du type K_2. Donc $S_n \underset{conv.}{\subset} E$

6) Ds $\mathbb{R}^n$, si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ ($f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$) alors sa dérivée seconde s'écrit comme suit : $\forall h, k \in \mathbb{R}^n$ $f''(x)(h,k) = \langle f''(x)h, k\rangle_n = \langle \mathrm{Hess} f(x) h, k\rangle_n$
c.à.d. on peut identifier $f''(x)$ avec $\mathrm{Hess} f(x)$ la matrice hessienne de f en x
or $\langle \mathrm{Hess} f(x) h, k\rangle_n = (\mathrm{Hess} f(x) h)^T k = h^T \mathrm{Hess} f(x) k$ puisqu'il s'agit du produit scalaire euclidien et sachant que $\mathrm{Hess} f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est sym. car $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On se rappelle alors que :
f convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $f''(x)(y-x, y-x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $(y-x)^T \mathrm{Hess} f(x)(y-x) \geq 0$
qui n'est vraie que lorsque $\mathrm{Hess} f(x)$ est semi-définie positive

7) On se rappelle aussi que si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$ $f''(x)(y-x, y-x) > 0$ alors f est strictement convexe

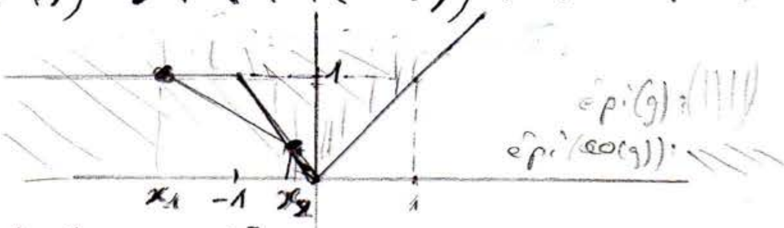
Or $f''(x)(y-x, y-x) = (y-x)^T \operatorname{Hess} f(x)(y-x) > 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $x \neq y$ ssi $\operatorname{Hess} f(x)$ est définie positive.

8) $f : E \to \mathbb{R}$ affine $\Rightarrow \exists \ell : E \to \mathbb{R}$ linéaire et $b \in \mathbb{R} / f(x) = \ell(x) + b$

$\lambda \in [0,1]$ $x, y \in E$ $f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \ell(\lambda x + (1-\lambda)y) + b = \lambda \ell(x) + (1-\lambda)\ell(y) + \lambda b + (1-\lambda) b$

Donc $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda[\ell(x) + b] + (1-\lambda)[\ell(y) + b]$
$= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
$\Rightarrow f$ convexe sur E

9) $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$



a) Le segment de droite $[(x_1, g(x_1)), (x_2, g(x_2))]$ qui lie les deux pts de la courbe de g : $(x_1, g(x_1))$ et $(x_2, g(x_2))$ t.q. $x_1 < -1$ et $x_2 \in]-1, 0[$, n'est pas contenu dans épi (g) $\Rightarrow$ g n'est pas convexe

b) $co(g)$ est la plus grande des fonctions convexes plus petite que g t.q. $\text{épi}(co(g)) = co(\text{épi}(g)) \Rightarrow co(g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

10) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto j(x) = (x+a)^2$ $a \in \mathbb{R}$

$j'(x) = 2(x+a) \Rightarrow j''(x) = 2 > 0$
Donc j convexe et m̂ strict. convexe puisque $j''(x) = 2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice

$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
$(x, y) \mapsto p(x,y) = \langle x, y \rangle_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $x = (x_i)_{i=1}^n$ et $y = (y_i)_{i=1}^n$

1) Dérivée directionnelle d'ordre 1 de p en $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans la direction $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\langle p'(x,y), (u,v) \rangle_{n \times n} &:= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left[p(x+tu, y+tv) - p(x,y)\right] \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left[\langle x+tu, y+tv \rangle_n - \langle x, y \rangle_n\right] \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left[\cancel{\langle x, y \rangle_n} + t\langle x, v \rangle_n + t\langle u, y \rangle_n + t^2 \langle u, v \rangle_n - \cancel{\langle x, y \rangle_n}\right] \\
&= \langle x, v \rangle_n + \langle y, u \rangle_n =: H(x,y)
\end{aligned}$$

2) Dérivée directionnelle d'ordre 2 de p en $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans la direction $(u', v') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

Suite de la question 2) de l'exercice :

$$p''(x,y)((u,v),(u',v')) := \langle H'(x,y),(u',v')\rangle := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[H(x+tu',y+tv') - H(x,y)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\langle x+tu',v\rangle_n + \langle y+tv',u\rangle_n - \langle x,v\rangle_n - \langle y,u\rangle_n\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\cancel{\langle x,v\rangle_n} + t\langle u',v\rangle_n + \cancel{\langle y,u\rangle_n} + t\langle v',u\rangle_n - \cancel{\langle x,v\rangle_n} - \cancel{\langle y,u\rangle_n}\right]$$

$$= \langle u',v\rangle_n + \langle u,v'\rangle_n$$

3) Lorsque $(u,v)=(u',v')$ on a $p''(x,y)((u,v),(u,v)) = \langle u,v\rangle_n + \langle u,v\rangle = 2\langle u,v\rangle$

p serait convexe $\Leftrightarrow \forall (x,y),(x',y')\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$

$$p''(x,y)\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = p''(x,y)((x'-x,y'-y),(x'-x,y'-y)) \geq 0$$

c.à d. p serait convexe $\Leftrightarrow 2\langle x'-x,y'-y\rangle_n \geq 0 \quad \forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$

Ce n'est pas vrai puisque si $x'=(1,\dots,1)^T\in\mathbb{R}^n$, $x=(2,\dots,2)^T\in\mathbb{R}^n$, $y'=(2,\dots,2)^T\in\mathbb{R}^n$ et $y=(1,\dots,1)^T\in\mathbb{R}^n$ alors $x'-x=(1-2,\dots,1-2)^T = (-1,\dots,-1)^T\in\mathbb{R}^n$

et $y'-y=(2-1,\dots,2-1)^T=(1,\dots,1)^T\in\mathbb{R}^n$

et par suite $p''(x,y)((x'-x,y'-y),(x'-x,y'-y)) = 2\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ \vdots\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle = 2\sum_{i=1}^n (-1).1 = -2n < 0$

Donc p n'est certainement pas convexe

4) La fction p n'est certainement pas strict. convexe puisque la convexité est 1 condition nécessaire pour la stricte convexité.

5) Ds $\mathbb{R}^n$, $q(x)=p(x,x)=\langle x,x\rangle_n \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

On peut identifier q à une fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$ en l'écrivant comme suit : $q(x)=\frac{1}{2}\langle 2I_n x,x\rangle_n - \langle 0_n,x\rangle + 0$ avec $A=2I_n$ sym. $b=0_n=(0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^n$, $c=0$

q est convexe puisque $A=2I_n=\begin{pmatrix}2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 2\end{pmatrix}$ est définie positive $\Rightarrow$ semi-définie positive.

<u>Autre version</u> $q(x)=\langle x,x\rangle_n=\sum_{i=1}^n x_i^2$ où $x=(x_i)_{i=1}^n=(x_1,\dots,x_n)^T$

$\frac{\partial q}{\partial x_i}(x)=2x_i \quad i=\overline{1,n} \Rightarrow \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}(x)=2 \quad \forall i=\overline{1,n}$ et $\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}(x)=0=\frac{\partial}{\partial x_j}(2x_i)=0$ si $i\neq j$

$$\mathrm{Hess}(q)(x)=\left(\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}=\begin{pmatrix}2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 2\end{pmatrix}=2I_n \text{ semi-définie positive} \Rightarrow q \text{ convexe}$$

6) q est bien sûr strictement convexe puisque $\mathrm{Hess}(q)(x)$ est définie positive puisque ttes ses valeurs propres st égales à $2>0$

Pour répondre aux deux dernières questions 5) et 6), on pourra toujours utiliser la définition de base de la dérivée directionnelle d'ordre 1 et 2 pour la fctionnelle q sur $\mathbb{R}^n$ pour montrer sa convexité et sa stricte-convexité sur $\mathbb{R}^n$:

$q(x) = p(x,x) = \langle x, x\rangle_n \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Donc la dérivée directionnelle d'ordre 1 de q au pt x ds la direction $v \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\langle q'(x), v\rangle_n := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[q(x+tv) - q(x)\right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\langle x+tv, x+tv\rangle_n - \langle x,x\rangle_n\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\langle x,x\rangle_n + t\langle x,v\rangle_n + t\langle v,x\rangle_n + t^2\langle v,v\rangle_n - \langle x,x\rangle_n\right]$$

$$= \langle x, v\rangle_n + \langle v, x\rangle_n = 2\langle x, v\rangle_n = h(x)$$

$$q''(x)(v,w) = \langle q''(x)v, w\rangle := \langle h'(x), w\rangle_n := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[h(x+tw) - h(x)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[2\langle x+tw, v\rangle_n - 2\langle x, v\rangle_n\right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t}\left[\langle x,v\rangle_n + t\langle w,v\rangle_n - \langle x,v\rangle_n\right]$$

$$q''(x)(v,w) = 2\langle v,w\rangle_n \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n.$$

5) q convexe $\Leftrightarrow q''(x)(y-x, y-x) \geq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow 2\langle y-x, y-x\rangle_n \geq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \|y-x\|_n^2 \geq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

Ceci est vrai $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ Donc q est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

6) Pour la stricte convexité, q est aussi strictement convexe puisque $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$ $q''(x)(y-x, y-x) = 2\|y-x\|_n^2 > 0$