Université de Tlemcen | Département de Mathématiques

3^e Année Licence - S5 | Novembre 2016

Introduction à l'Analyse Hilbertienne | Examen Partiel | 1H45

***Exercice 1*:** *Soient A et B deux parties non vides d'un espace préhilbertien E dont le produit scalaire est noté par $\langle .,. \rangle$ et la norme associée est $\|.\|$.*
Montrer les propriétés suivantes:

1. $A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. $A^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E.
3. $A^{\perp} = \bar{A}^{\perp}$.

   ($\bar{A}^{\perp}$étant l'orthogonal de la fermeture (adhérence) de A.)

***Exercice 2*:** *Muni du produit scalaire donné par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, l'espace*

$$H = L^2([0,1],\mathbb{R}) = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \,;\; \int_0^1 f^2(x)\,dx < +\infty \right\}$$

est un espace de Hilbert.
Soit F le sous-espace vectoriel de H défini par :

$$F = \left\{ f \in H;\; \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

1. *Montrer que F est fermé.*
2. *Déterminer la projection de la fonction $g : x \longmapsto e^x$ sur F.*
3. *En déduire la distance de la fonction g à F.*

***Exercice 3*:** *Soit l'espace de Hilbert*

$$H = L^2(]-\pi,\ \pi[,\ \mathbb{C}) = \left\{ f :]-\pi,\ \pi[\longrightarrow \mathbb{C} \,;\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < +\infty \right\}$$

H est muni de la norme $\|.\|$ provenant du produit scalaire $\langle .,. \rangle$:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \qquad\qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

1. *Montrer que le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, défini par $e_n(x) = e^{inx}$, est un système orthonormal de H.*

   On admet que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $(H,\ dx/2\pi)$.
2. *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f : x \longmapsto e^{iax}$, où a est un nombre réel non entier et $-\pi < x < \pi$.*
3. *En déduire que*

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a-n)^2}.$$

Barème: *Exercice 1: 7 pts* — *Exercice 2: 6 pts* — *Exercice 3: 7pts*

Corrigé détaillé de l'examen partiel

Exercice 1: *Soient A et B deux parties non vides d'un espace préhilbertien E dont le produit scalaire est noté par $\langle .,. \rangle$ et la norme associée est $\|.\|$.*
On a :

1. $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$. **(2 pts)**
   En effet :
   Soit $x \in B^\perp$, *alors,* $\langle x, y \rangle = 0, \ \ \forall y \in B$.
   Comme $A \subset B$, *on a* $\langle x, y \rangle = 0, \ \ \forall y \in A$.
   D'où $x \in A^\perp$ *et par suite* $B^\perp \subset A^\perp$.

2. $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E. *On évidemment* $0 \in A^\perp$.
   Soient $x, y \in A^\perp$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$.
   Pour tout $z \in A$, *on a* $\langle x + \alpha y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle = 0$.
   Ainsi $x + \alpha y \in A^\perp$ *et* $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* E. **(1 pt)**
   Montrons que $A^\perp$ *est fermé.* **(2 pts)**
   Soit $(x_n)_n$ *une suite de* $A^\perp$ *convergente vers* $x \in E$. *Montrons que* $x \in A^\perp$.
   Il suffit de montrer que, $\langle x, a \rangle = 0, \ \forall a \in A$.
   On a, pour tout $a \in A$,
   $\langle x, a \rangle = \langle x - x_n + x_n, a \rangle = \langle x - x_n, a \rangle + \langle x_n, a \rangle = \langle x - x_n, a \rangle$ *car* $\langle x_n, a \rangle = 0$.
   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient
   $$|\langle x, a \rangle| = |\langle x - x_n, \ a \rangle| \leq \|x - x_n\| \|a\|.$$
   D'où, $(x_n)_n$ *étant convergente vers* x,
   $$|\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \lim_{n \to +\infty} \|x - x_n\| = 0.$$
   Et par suite $\langle x, a \rangle = 0$, *et* a *étant quelconque dans* A *alors* $x \in A^\perp$. *Ainsi* $A^\perp$ *est fermé.*

3. $A^\perp = \bar{A}^\perp$.
   On a déjà $\bar{A}^\perp \subset A^\perp$ *car* $A \subset \bar{A}$. *Reste à montrer que* $A^\perp \subset \bar{A}^\perp$. **(2 pts)**

Soient $x \in A^\perp$ *et* $y \in \bar{A}$. *On sait que ;*
$$y \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (y_n) \subset A \colon \lim_{n \to +\infty} \|y_n - y\| = 0.$$
On a $\langle x, \ y \rangle = \langle x, \ y - y_n + y_n \rangle = \langle x, \ y - y_n \rangle + \langle x, \ y_n \rangle = \langle x, \ y - y_n \rangle$
(car $\langle x, \ y_n \rangle = 0$ *puisque* $x \in A^\perp$ *et* $y_n \in A$.*)*
Maintenant
$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, \ y - y_n \rangle| \leq \|x\| \|y - y_n\|.$$
Et en faisant tendre n vers l'infini , on obtient $\langle x, \ y \rangle = 0$,
et par suite $x \in \bar{A}^\perp$, *d'où* $A^\perp \subset \bar{A}^\perp$.

***Exercice 2*:** *Soit l'espace de Hilbert*

$$H = L^2([0,1],\mathbb{R}) = \left\{ f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ \int_0^1 f^2(x)\,dx < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Soit F le sous-espace vectoriel de H défini par :

$$F = \left\{ f \in H;\ \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

1. *Montrons que F est fermé.* **(3 pts)**

   Considérons la forme linéaire $\phi:\ H \longrightarrow \mathbb{R}$

   $$f \longmapsto \phi(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

   Nous avons $F = Ker\phi = \phi^{-1}(\{0\})$.

   Vérifions que ϕ *est continue.*

   On a $|\phi(f)| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx = \langle \mathbf{1}, |f|\rangle \leq \|\mathbf{1}\|\|f\| = \|f\|$,

   ainsi ϕ *est continue et de plus* $\|\phi\|_{H'} = 1$ *(car* $\phi(\mathbf{1}) = 1$*).*

   (ici $\mathbf{1}$ *est la fonction définie sur* $[0,\ 1]$ *par* $\mathbf{1}(x) = 1$. *)*

   Étant l'image réciproque d'un fermé par une application continue, F est fermé.

2. *Déterminons la projection de la fonction* $g: x \longmapsto e^x$ *sur F.* **(1,5 pt)**

   Soit g_1 *la projection de la fonction* g *sur F,* $P_F g = g_1$.

On a

$$\begin{cases} g_1 \in F \\ g - g_1 \in F^{\perp}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $F^{\perp} = \mathbb{R}\,\mathbf{1} = \{f \in H;\ f \text{ constante p.p. sur } [0,\ 1]\}$,

d'où

$$\left.\begin{array}{r} g_1 \in F \\ g - g_1 \in F^{\perp} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 g_1(x)\,dx = 0 \\ e^x - g_1(x) = c, \quad (c \text{ constante réelle}) \end{cases}$$

en intégrant les deux membres de la deuxième équation sur $[0,\ 1]$, *on trouve* $c = e - 1$, *et par suite* $g_1(x) = e^x - e + 1$.

3. *Distance de la fonction g au s.-e.v. F :* **(1,5 pt)**

   On sait que, $d(g,\ F) = \inf_{f \in F}\|g - f\| = \|g - P_F g\|$.

   D'où

$$d(g,F) = \|g - g_1\| = \sqrt{\left(\int_0^1 |e-1|^2\,dx\right)} = e - 1.$$

Université de Tlemcen | Département de Mathématiques

3e Année Licence - S5 | Novembre 2016

Introduction à l'Analyse Hilbertienne | Examen Partiel | 1H45

Exercice 3: *Soit l'espace de Hilbert*

$$H = L^2(]-\pi,\ \pi[,\ \mathbb{C}) = \left\{ f :]-\pi,\ \pi[\longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < +\infty \right\}$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \qquad\qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

1 Montrons que le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $e_n(x) = e^{inx}$, est un système orthonormal de H

(2 pts) *: On a, pour $k, n \in \mathbb{Z}$*

$$\langle e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x)\overline{e_n(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x}\, dx.$$

D'où si $k = n$, $\langle e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$,

et si $k \neq n$,

$$\langle e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi i(k-n)}\left[e^{i(k-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi i(k-n)}\left[(-1)^{k-n} - (-1)^{n-k}\right] = 0.$$

Ainsi, pour tous entiers relatifs k et n

$$\langle e_k, e_n\rangle = \begin{cases} 1 \ si & k = n \\ 0\ si & k \neq n, \end{cases}$$

le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc orthonormal dans H.

On admet que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $(H,\ dx/2\pi)$.

2. **(2 pts)** *Calculons les coefficients de Fourier de la fonction $f : x \longmapsto e^{iax}$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $-\pi < x < \pi$.*

On a

$$c_n(f) = c_n = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)x}\, dx = \frac{1}{2\pi i(a-n)}\left[e^{i(a-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi}.$$

D'où

$$c_n = \frac{2i\,\mathrm{Im}\left(e^{i(a-n)\pi}\right)}{2\pi i(a-n)} = \frac{\sin[(a-n)\pi]}{\pi(a-n)} = \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi(a-n)}.$$

3. **(3 pts)** *En utilisant l'égalité de Parseval*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

nous obtenons

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(a\pi)}{\pi^2(a-n)^2}.$$

D'où

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a-n)^2}.$$

(On a évidemment $|f(x)| = \left|e^{iax}\right| = 1$, car $ax \in \mathbb{R}$.)