Université de Tlemcen   A.U. 2016/2017

Département de mathématiques

Série n° 2 sur les espaces euclidiens.

Exercice n° 1

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme orthogonal de E, F un sous espace vectoriel de E.

Montrer que $f(F^{\perp}) = (f(F))^{\perp}$.

Exercice n° 2

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme orthogonal de E, V un sous espace vectoriel de E.

Montrer que : $f(V) \subset V \iff f(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$

Exercice n° 3

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 4

Préciser la nature des endomorphismes, qui dans la base canonique sont représentés par

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme de E, $u = f^{*} \circ f$

1/ Montrer que u est symétrique

2/ Montrer que si λ est une valeur propre de u alors $\lambda \geq 0$

Exercice n° 6

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E

1/ Montrer que $\operatorname{Ker} u^{*} = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} u^{*} = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$

2/ On suppose que $u \circ u = 0$, montrer alors que $\operatorname{Ker}(u + u^{*}) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^{*}$

Algèbre 4 Corrigé de la série n° 2 des espaces euclidiens.

Exercice n° 1 2) :

$$f(F^{\perp}) \subset (f(F))^{\perp}$$

$y \in f(F^{\perp}) \Longrightarrow \exists x \in F^{\perp} / y = f(x).$

$\Longrightarrow \langle x, a \rangle = 0 \ \forall a \in F$ et $y = f(x)$

$\xrightarrow{f \text{ orthog}} \langle f(x), f(a) \rangle = 0 \ \forall a \in F$ et $y = f(x).$

$\Longrightarrow \langle y, f(a) \rangle = 0 \ \forall a \in F.$

$\xrightarrow[f \text{ bij}]{f \text{ orthog}} \langle y, t \rangle = 0 \ \forall t \in f(F)$

$\Longrightarrow y \in (f(F))^{\perp}$

cl : $f(F^{\perp}) \subset (f(F))^{\perp}$

Pour montrer que $f(F^{\perp}) = (f(F))^{\perp}$ il suffit de montrer que $\dim f(F^{\perp}) = \dim (f(F))^{\perp}$ il suffit de montrer que $\dim f(F^{\perp}) = \dim (f(F))^{\perp}$.

Comme f est un endomorphisme orthogonal et donc bijectif on a $\dim F^{\perp} = \dim f(F^{\perp})$ et $\dim F = \dim f(F)$. ①

par ailleurs on sait que.

$$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} \quad ②$$

et

$$\dim E = \dim f(F) + \dim (f(F))^{\perp} \quad ③$$

①, ② et ③ $\Longrightarrow \dim f(F^{\perp}) = \dim (f(F))^{\perp}$ c.q.f.d.

Exercice n° 2

1° ($\Rightarrow$) $f(V) \subset V \Rightarrow f(V^\perp) \subset V^\perp$.

$f(V) \subset V \xrightarrow[f \text{ bijectif}]{f \text{ orthog}} f(V) = V$,

Soit $y \in f(V^\perp) \Rightarrow \exists x \in V^\perp \ / \ y = f(x)$.

$\Rightarrow \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$ et $y = f(x)$.

$\xrightarrow{f \text{ orthog}} \langle f(x), f(v) \rangle = 0 \ \forall v \in V$ et $y = f(x)$

$\Longrightarrow \langle y, f(v) \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

$\xrightarrow{f \text{ bijectif}} \langle y, t \rangle = 0 \quad \forall t \in f(V)$

$\xrightarrow{f(V) = V} \langle y, t \rangle = 0 \quad \forall t \in V \Rightarrow y \in V^\perp \Rightarrow f(V^\perp) \subset V^\perp$

($\Leftarrow$)

$f(V^\perp) \subset V^\perp \xrightarrow{1°} f(V^{\perp\perp}) \subset V^{\perp\perp} \Rightarrow f(V) \subset V$.

Exercice n° 3

A est symétrique réelle $\xrightarrow{\text{Th.}}$ A est diagonalisable et les sous espaces propres sont orthogonaux 2 à 2.

$P_A(X) = -X(X-6)^2 \xrightarrow{A \text{ diag}}$ $\dim E_0 = 1$ et $\dim E_6 = 2$.

par conséquent $E_0 = [v_1]$ et $E_6 = [v_2, v_3]$

$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{Après calculs}} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - 6I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{Après calculs}} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme les sous espaces propres sont orthogonaux 2 à 2, on a $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ et $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, il nous reste à orthogonaliser $\{v_2, v_3\}$: Schmidt $\Longrightarrow \{v_2, w_3\}$ orthogonale. avec $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $\{v_1, v_2, w_3\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de A.

$\Longrightarrow \left\{ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} ; \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} ; \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de A.

Exercice n° 4

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

${}^tA . A = I \Longrightarrow A \in O(3, \mathbb{R})$

$\det A = -1 \Longrightarrow$ A représente une rotation autour de l'axe E_{-1} suivie d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$, l'angle de rotation est donné par $T_r A = 2\cos\theta - 1$.

Après calculs on trouve $E_{-1} = [v_1]$ avec $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$E_{-1}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$ et $T_r A = 2\cos\theta - 1$.

$\Longrightarrow 2\cos\theta - 1 = 1 \Longrightarrow \cos\theta = 1 \Longrightarrow \theta = 0$.

cl : A représente une symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x+y+z = 0$.

Idem pour B.

Exercice n° 5

1°/ $u = f^* \circ f \Longrightarrow u^* = (f^* \circ f)^* = f^* \circ f^{**} = f^* \circ f = u$.

$\Longrightarrow u^* = u \Longrightarrow u$ est symétrique.

2°/ λ valeur propre de $u \Longrightarrow \exists x \in E\ (x \neq 0) / u(x) = \lambda x$

$\Longrightarrow \langle u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$

d'autre part $\langle u(x), x\rangle = \underbrace{\langle (f^* \circ f)(x), x\rangle}_{= \|f(x)\|^2} = \langle f^*(f(x)), x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle$

$\Longrightarrow \lambda \|x\|^2 = \|f(x)\|^2 \Longrightarrow \lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \Longrightarrow \lambda > 0$

Exercice n° 6

1°/ $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

$\subset$

Soit $x \in \operatorname{Ker} u^*$ et montrons que $x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$ i.e. $\langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in \operatorname{I}$

Soit $y \in \operatorname{Im} u \Rightarrow \exists a \in E / y = u(a)$.

$\langle x, y\rangle = \langle x, u(a)\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle a, u^*(x)\rangle$

$\xrightarrow[u^*(x)=0]{x \in \operatorname{Ker} u^*} \langle a, 0\rangle = 0$.

$\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in \operatorname{Im} u \Rightarrow x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$

d'où : $\operatorname{Ker} u^* \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$

$\supset$

$x \in (\operatorname{Im} u)^\perp \Rightarrow \langle x, u(x)\rangle = 0 \ \forall x \in E$

$\Rightarrow \langle u(a), x\rangle = 0 \ \forall a \in E$

$\Rightarrow \langle a, u^*(x)\rangle = 0 \ \forall a \in E$.

cây $\Rightarrow \langle u^*(x), a\rangle = 0 \ \forall a \in E$.

$\Rightarrow u^*(x) \in E^\perp \xrightarrow{E^\perp = \{0\}} u^*(x) \in \{0\}$

$\Rightarrow u^*(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u^*$.

d'où : $(\operatorname{Im} u)^\perp \subset \operatorname{Ker} u^*$.

$\Rightarrow \operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp \Rightarrow \operatorname{Ker} u^{**} = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^\perp \Rightarrow (\operatorname{Ker} u)^\perp = (\operatorname{Im} u^*)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} u^*$.

$\Rightarrow \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$

2°/ $\supset$ $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^* \subset \operatorname{Ker}(u+u^*)$ évident,

$\subset$ $x \in \operatorname{Ker}(u+u^*) \Rightarrow (u+u^*)(x) = 0 \Rightarrow u(x) + u^*(x) = 0$

$\Rightarrow u(u(x)+u^*(x)) = 0 \Rightarrow u^2(x) + u(u^*(x)) = 0$

$\xrightarrow{u^2=0} u(u^*(x)) = 0 \Rightarrow u^*(x) \in \operatorname{Ker} u$ or $u^*(x) \in \operatorname{Im} u^*$.

$\xrightarrow{\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp} u^*(x) \in \operatorname{Ker} u$ et $u^*(x) \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

$\Longrightarrow u^*(x) \in (\operatorname{Ker} u) \cap (\operatorname{Ker} u)^\perp \Rightarrow u^*(x) \in \{0\} \Rightarrow u^*(x) = 0$

$\Rightarrow u^{**}(x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^*$.

d'où : $\operatorname{Ker}(u+u^*) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^*$.