Université Abou Bekr Belkaid 2016/2017
Département de Mathématiques
Module: Analyse numérique 2
Fiche de TD N°1

Résolution des systèmes linéaires
(méthodes directes)

Exercice 1
Ecrire la méthode de Gauss sur une matrice tridiagonale et compter le nombre d'opérations.

Exercice 2
Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a- Montrer que A admet une décomposition LU.
b- Résoudre $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU de A.

Exercice 3
On considère la matrice
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1- Quelle est la décomposition LU de A?
2- Résoudre en utilisant la question précédente, les systèmes $AX_i = e_i$ où les e_i sont les vecteurs de la base canonique usuelle de $\mathbb{R}^3$.En déduire A^{-1}.

Exercice supplémentaire
1- Réaliser la décomposition LU de la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

2- En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}^t$.
3- Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

Exercice 4
On veut résoudre le système $Ax = b$ où:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

1- Vérifier que l'algorithme de Gauss sans pivot ne peut être exécuté jusqu'au bout.
2- Trouver une matrice de permutation P telle que lamatrice PA soit factorisable (ie telle que l'algorithme de Gauss puisse être exécuté jusqu'au bout).
3- Trouver la factorisation LU de la matrice PA.
4- Résoudre le système de départ $Ax = b$ en remplaçant PA par LU.

Exercice 5
Supposons que les nombres sont représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit $Ax = b$ avec
$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et b=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1- Résoudre par la méthode de Gauss en choisissant comme pivot 10^{-4}.
2- Résoudre par la méthode de Gauss en choisissant comme ligne de pivot à la première étape, la deuxième ligne.
3- Conclure.

Exercice 6

Soit A une matrice carrée réelle $n \times n$ inversible, b et c deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et d un réel. On considère la matrice B carrée $(n+1) \times (n+1)$ écrite (par blocs) comme:

$B = \begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$

On suppose que A et B admettent chacune une décomposition LU, soit: $A = L_A U_A$ et $B = L_B U_B$

On pose alors (même découpage par blocs que pour la matrice B) :

$L_B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ m^t & 1 \end{pmatrix}$ et $U_B = \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$

1- Calculer M, m, V, v, w en fonction de L_A, U_A, b, c, d.
2- Montrer que $\det B = w \det A$. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible est que:

$$d \neq c^t A^{-1} b$$

3- Démontrer la formule suivante:

$$L_B = \begin{pmatrix} L_A^{-1} & 0 \\ -c^t A^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

4- Trouver une formule similaire pour U_B^{-1}.
5- En déduire une expression de B^{-1} en fonction de A^{-1}, b, c et d.
6- Soit f un vecteur de dimension n et x la solution de $Ax = f$, soit g un réel, montrer que la solution y du problème

$By = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme $y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\beta}{w} \begin{pmatrix} A^{-1}b \\ -1 \end{pmatrix}$ avec β un réel que l'on déterminera.

7- En déduire une méthode pour résoudre un système $(n+1)\times(n+1)$ quand on sait résoudre (facilement) un système $n \times n$.