Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
- $2^{ère}$ Année LMD -— AU 2016/2017

Examen Final –Probabilités – (Durée 1 h 30mn)

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 **(6 Pts)**

Soit $E = \{a,b,c,d\}$. On choisit au hasard un sous ensemble F de E .

1) Calculer la probabilité que $\{a,c,d\} \subset F$. (1 Pt)

2) Calculer la probabilité que $\{a,b,c\} \subset F$ sachant $a \in F$ (1,5 Pts)

3) Soit X la v.a égale au nombre d'éléments de F.

Déterminer la loi de X et en déduire E(X) et Var(X) (1,5 Pts + 1 Pt + 1 Pt)

Exercice 2 **(6 Pts)**

Soient X et Y deux v.a in dépendantes telles que $X \hookrightarrow b\left(2, \frac{1}{4}\right)$ et $Y \hookrightarrow B\left(\frac{1}{2}\right)$.

1) Déterminer E(X) et Var(X) (1 Pt + 1 Pt)

2) Calculer la loi du couple (X,Y). (2 Pts).

3) On pose $T = X + Y$. Calculer la loi de T (2Pts)

Exercice 3 **(8 Pts)**

Soit X une v.a qui suit une loi normale centrée et réduite. ($X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$)

I) On pose $Y = \frac{1}{2} X - 1$.

1) Déterminer la densité de probabilité de la v.a Y . (2 Pts)

2) Calculer: **i**) E(Y) , **ii**) Var(Y) ; **iii**) P ($Y >$ 0,17) (1 Pt + 1 Pt + 1 Pt)

3) Déterminer le nombre réel α tel que P ($Y >$ α) = 0,9830. (1 Pt)

II) On pose $Z = X^3$. Déterminer la densité de probabilité de la v.a Z (2 Pts)

On rappelle :

$X \hookrightarrow b(n,p)$ (loi binomiale de paramètres n et p) $\Leftrightarrow X(\Omega) = \{0,1,....n\}$

et $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. ; $B(p) = b(1,p)$

Math 1ère année – Corrigé Succinct – Epreuve Finale – AU 2016/2017

Exercice 1 (6pts)

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. On a $\text{Card}\, \mathcal{P}(E) = 2^5$

1) Il y a $2^2 = 4$ façons de compléter $\{a, c, d\}$ en une partie de E le contenant d'où $P(\{a,c,d\} \subset F) = \frac{2^2}{2^5} = \frac{1}{8}$ (1pt) (le choix de F se fait au hasard)

2) Comme il y a 2^4 façons de compléter $\{a\}$ en une partie de E le contenant on a $P(a \in F) = \frac{2^4}{2^5} = 1/2$. Or $P(\{a,c,d\} \subset F / a \in F) = \frac{P(\{a,c,d\} \subset F)}{P(a \in F)} = \frac{1}{4}$ (1,5pt)

3) On note X la V.a égale au card F. Comme $\text{Card}(F) \in \{0,1,2,3,4,5\}$; on a $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$ or $P(X=k) = \frac{C_5^k}{2^5} = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}$ donc

$X \hookrightarrow b(5, 1/2)$ (1,5pt)

d'après le rappel : $E(X) = 5 \cdot 1/2 = 5/2$ (1pt) ; $Var(X) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ (1pt)

Exercice 2 (6pts)

X et Y indépendants ; de plus $X \hookrightarrow b(2; 1/4)$ et $Y \hookrightarrow B(1/2)$

1) $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (1pt) ; $Var(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (1pt)

2) or les lois de X et de Y sont données par

$X = x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$C_2^0 (\frac{1}{4})^0 (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$	$C_2^1 (\frac{1}{4})(\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$	$C_2^2 (\frac{1}{4})^2 (\frac{3}{4})^0 = \frac{1}{16}$

$Y = y_i$	0	1
$P(Y=y_i)$	1/2	1/2

d'où la loi du couple (X, Y) : $P(X=k, Y=l) = P(X=k) \cdot P(Y=l)$

$Y = y_i$ \ $X = x_i$	0	1	2
0	9/32	3/16	1/32
1	9/32	3/16	1/32

(2pts)

3/ On pose $T=(X+Y) \Rightarrow T(\Omega)=\{0,1,2,3\}$. 02

$P(T=0)=P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0).P(Y=0)=9/32$

$P(T=1)=P(X+Y=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=\frac{9}{32}+\frac{3}{16}=\frac{15}{32}$

$P(T=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)=\frac{3}{16}+\frac{1}{32}=7/32$

$P(T=3)=P(X+Y=3)=P(X=2,Y=1)=1/32$

d'où la loi de T :

$T=t_i$	0	1	2	3
$P(T=t_i)$	9/32	15/32	7/32	1/32

2 pts

Exercice 3 8 pts

I $X \hookrightarrow N(0,1)$ et $Y=\frac{1}{2}X-1$.

Soit $y\in\mathbb{R}$: $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(\frac{1}{2}X-1\leq y)=P(X\leq 2(y+1))$

$\Rightarrow F_Y(y)=F_X(2(y+1)) \Rightarrow f_Y(y)=2f_X(2(y+1))$. Ainsi

$f_Y(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(2(y+1))^2)$ $y\in\mathbb{R}$ 2 pts

2) $E(Y)=-1$ et $Var(Y)=\frac{1}{4}$ (1 pt + 1 pt)

Car $Y \hookrightarrow N(-1, \frac{1}{4}=\sigma^2)$.

$P(Y>0,17)=P(2(Y+1)>2(1+0,17))=P(X>2,34)$

d'après la table $P(X>2,34)=1-P(X\leq 2,34)=0,0096$ 1 pt

3) $P(Y>\alpha)=P(2(Y+1)>2(\alpha+1))=P(X>(2(\alpha+1)))=0,9830$

$\Rightarrow 1-P(X\leq 2(\alpha+1))=0,0170 \Rightarrow P(X\leq 2(\alpha+1))=0,9830$

(Car $P(X\leq\beta)+P(X\leq-\beta)=1$) 

II 3

d'après la table : $-2(\alpha+1) = 2{,}12 \Rightarrow \alpha = 2{,}06$

(1pt)

(3) on pose $Z = X^3$

$z \in \mathbb{R}$

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X^3 \leq z) = P(X \leq z^{1/3})$

$\Rightarrow F_Z(z) = F_X(z^{1/3}) \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{3} z^{-2/3} f_X(z^{1/3})$

$\Rightarrow$ pour $z \in \mathbb{R}$:

$$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z^{2/3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^{1/3}\right)^2\right)$$

(2pts)

III / 3