Faculté des Sciences AU 2016-17
Dept. Mathématiques
Tlemcen
Epreuve finale de Géométrie Différentielle
Durée 1h30

Exercice1:

Soit $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2, t \to \varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ et soit $\alpha$ la forme définie sur $U = R^2 - \{0\}$ par

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

1) Vérifier que $\alpha$ est une forme fermée sur $U$.
2) Calculer $\varphi^* \alpha$ .
3) La forme $\alpha$ est -elle exacte?

Exercice2

Soit $M$ une variété compacte de dimension $n$ à bord $\partial M$. Soient $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$ et $\tau \in \Omega^{n-p}(\Omega)$ deux formes différentielles de classe $C^\infty$.

Montrer que
$\int_M d\omega \wedge \tau = \int_{\partial M} \omega \wedge \tau + (-1)^p \int_M \omega \wedge d\tau$.

Exercice3

On considère $\omega$ la forme différentielle définie sur $R^2$ par

$$\omega = \left(x^2 + y^2 - a^2\right) dx - 2aydy$$

où $a$ est un nombre réel non nul

1) Prouver que la forme différentielle n'est pas exacte.
2) Soit $f : R \to R$ une fonction de classe $C^1$. On pose $\alpha(x, y) = f(x)\omega(x, y)$. Quelle condition doit vérifier la fonction $f$ pour que la forme différentielle $\alpha$ soit exacte? Cette condition est-elle suffisante ?, Détérminer une fonction $f$ vérifiant la condition précédente.
3) Calculer une primitive de $\alpha$ sur $R^2$ i.e. une fonction $g$ sur $R^2$ telle que $\alpha = dg$.
4) Soit $C$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $a$. Calculer

$$\int_C \alpha.$$

# Solutions

Exercice1

1) Vérifions que $\alpha$ est une forme fermée

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\wedge dx \\ &= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\wedge dy - \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy\wedge dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) Calculons :

$$\begin{aligned} \left(\varphi^*\alpha\right)(t) &= \frac{xo\varphi(t)dyo\varphi(t) - yo\varphi(t)dxo\varphi(t)}{\left(xo\varphi(t)\right)^2 + \left(yo\varphi(t)\right)^2} \qquad (1) \\ &= \frac{\left(\cos t\right)^2 dt + \left(\sin t\right)^2 dt}{\cos^2 t + \sin^2(t)} = dt. \end{aligned}$$

3) $\alpha$ n'est pas une forme exacte car sinon il existerait une fonction $f$ sur l'ouvert $R^2 - \{(0,0)\}$ telle que $\alpha = df$ et alors on aura

$$\begin{aligned} \left(\varphi^* df\right)(t) &= \left(\varphi^* df\right)(t) = d\left(\varphi^* f\right)(t) \\ &= d\left(fo\varphi\right)(t) \end{aligned}$$

Alors puisque $\varphi$ est périodique, $\left(fo\varphi\right)'$ est periodique de periode $2\pi$. Mais par la relation (1), on a $\left(fo\varphi\right)' = 1$. Une contradiction.

Exercice2

Remarquons que

$$\omega\wedge\tau \in \Omega^{n-1}\left(M\right)$$

et par conséquent $d(\omega\wedge\tau) \in \Omega^n\left(M\right)$ i.e. une $n-$forme.

En plus la régle de différentiation extérieure, nous avons

$$d(\omega\wedge\tau) = d\omega\wedge\tau + (-1)^{p-1}\omega\wedge d\tau.$$

Par intégration, on obtient

$$\int_M d\omega\wedge\tau = \int_M d(\omega\wedge\tau) - (-1)^{p-1}\int_M \omega\wedge d\tau$$

et par application du théorème de Stokes, on trouve la formule demandée

$$\int_M d\omega\wedge\tau = \int_{\partial M}\omega\wedge\tau + (-1)^p\int_M \omega\wedge d\tau.$$

Exercice1

1) Montrons que la forme $\omega$ n'est pas exacte

$$d\omega = d\left(x^2+y^2-a^2\right)\wedge dx = -2ydx\wedge dy \neq 0$$

$\omega$ n'est pas fermée et donc non exacte.

2) Condition sur la fonction $f : R \to R$

Considérons la forme différentielle $\alpha(x,y) = f(x)\omega(x,y)$. Alors

$$\begin{aligned} d\alpha &= df\wedge\omega + fd\omega \\ &= -2y\left(af'(x)+f(x)\right)dx\wedge dy \end{aligned}$$

et $\alpha$ sera fermée ssi

$$f' = -\frac{1}{a}f. \tag{2}$$

Puisque le domaine $R^2$ est étoilé il résulté du lemme de Poincaré que $\alpha$ est exacte sous la condition 2 i.e. la condition (2) est suffisante. La solution de (2) est

$$f(x) = Ce^{-\frac{x}{a}} \text{ avec } C \text{ une constante}$$

On prend $f(x) = e^{-\frac{x}{a}}$.

3) Cherchons une fonction $g$ sur $R^2$ telle que $dg = \alpha$ ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = e^{-\frac{x}{a}}\left(x^2+y^2-a^2\right) \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -2aye^{-\frac{x}{a}} \end{cases}$$

En intégrant la deuxième équation :

$$g(x,y) = -ay^2e^{-\frac{x}{a}} + c(x)$$

et en remplaçant dans la première équation on trouve

$$c'(x) = \left(x^2-a^2\right)e^{-\frac{x}{a}}$$

et par intégration par parties,

$$c(x) = -a\left(a^2+2ax+x^2\right)e^{-\frac{x}{a}}$$

d'où

$$g(x,y) = -a\left(a^2+2ax+x^2+y^2\right)e^{-\frac{x}{a}}.$$

4) Calculons

$$\begin{aligned} \int_C \alpha &= \int_C dg = \int_0^{2\pi} dg(a\cos t, a\sin t)dt \\ &= g(a\cos 2\pi, a\sin 2\pi) - g(a\cos 0, a\sin 0) = 0. \end{aligned}$$