U.A.B.T. 2016/2017

Département de Mathématiques

Durée: 90 mn **Examen final d'analyse numérique 2**

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de $x^{(k)}$, vecteur déterminé par la méthode de la puissance.

2. Combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir $\left\|x^{(k)} - v_1\right\|_\infty < 10^{-6}$ où v_1 est le vecteur propre associé à la valeur propre dominante de A avec $\|v_1\|_\infty = 1$.(donner seulement la formule pour k)

Solution

1. On a $\left\|x^{(0)}\right\|_\infty = 1 \Rightarrow Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\left\|Ax^{(0)}\right\|_\infty = 1 \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.99^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\left\|Ax^{(1)}\right\|_\infty = 1 \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.99^2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une simple récurrence permet de montrer que $x^{(k)} = \begin{pmatrix} 0.99^k \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Il est facile de vérifier que $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\left\|x^{(k)} - v_1\right\|_\infty = 0.99^k$.

Donc $\left\|x^{(k)} - v_1\right\|_\infty < 10^{-6} \Leftrightarrow 0.99^k < 10^{-6} \Rightarrow k > (-6)/\log_{10}(0.99)$.

Exercice 2

On donne la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. A partir de la méthode de **Jacobi**, déterminer toutes les valeurs propres de la matrice A ainsi que les vecteurs propres associés.

2. Calculer deux itérations de la méthode de la puissance avec $x^{(0)} = (0, 0, 1)^T$.

3. Expliquer le résultat.

Solution

1. On pose $R = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$

Comme $a_{11} = a_{22} = 5$ alors $\theta = \pi/4$.

$$R^T AR = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7$ et $\lambda_3 = 3$, les vecteurs propres associés sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\left\|x^{(0)}\right\|_\infty = 1$

Première itération $y^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \dfrac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

De même $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. La méthode de la puissance ne converge pas vers un vecteur propre associé à la valeur propre dominante $\lambda_2 = 7$,car le vecteur initial $x^{(0)}$s'écrit dans la base des vecteurs propres $x^{(0)} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = v_3$avec $\alpha_2 = 0$. Dans ce cas $x^{(0)}$ est orthogonal à l'espace propre engendré par v_1.

Exercice 3

Etant donnée une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On définit son quotient de Rayleigh associé $r(x)$ pour un vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$ par:

$$r(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

Soit A une matrice symétrique.

On suppose que les valeurs propres de A sont arrangées dans cet ordre, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, alors $\lambda_1 \geq r(x) \geq \lambda_n$.
2. Montrer que les valeurs extrêmes de $r(x)$ sont atteintes.

Solution

1. La matrice symétrique A admet n valeurs propres distincts elle est diagonalisable, il existe donc une base orthonormale de vecteurs propres .

On se donne $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base formée par les vecteurs propres tels que $\|v_i\|_2 = 1$ et $v_i^T v_j = 0$ si $i \neq j$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ et $Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i A v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v_i$.

Il s'en suit que $x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \lambda_j v_i^T v_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i v_i^T v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i$ et $x^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 v_i^T v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$

Or $\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i > \lambda_n \sum_{i=1}^{n} c_i^2$. Donc $\lambda_1 > \dfrac{x^T Ax}{x^T x} > \lambda_n$.

2. Pour montrer que λ_1 est atteinte il suffit de prendre $x = v_1$.

$\dfrac{x^T Ax}{x^T x} = \dfrac{v_1^T \lambda_1 v_1}{v_1^T v_1} = \lambda_1$.

De même pour montrer que λ_n est atteinte il suffit de prendre $x = v_n$.

Exercice 4

On considère le problème

$$(P) : \begin{cases} y' = ty + t^3 & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que (P) admet une solution unique.
2. Trouver la solution exacte du problème.
3. Trouver, en fonction du pas h, une borne de l'erreur pour la méthode d'Euler.

Solution

1. On pose $f(t,y) = ty + t^3, \forall (t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

f est une fonction continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$.

De plus $\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\right| = |t| \leq 1$ donc f est 1-lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).
2. $y' = ty + t^3$ est une equation linéaire avec second menbre.
La solution de l'équation $y' = ty$, est $y(t) = Ke^{\frac{1}{2}t^2}$
A partir de la variation de la constante $y' = K'e^{\frac{1}{2}t^2} + tKe^{\frac{1}{2}t^2}$
En remplaçant dans l'équation du problème (P) on obtient $K'e^{\frac{1}{2}t^2} = t^3$, ce qui implique $K' = t^3 e^{-\frac{1}{2}t^2}$
d'où $\int dK = \int t^3 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, il s'en suit $K = -e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(t^2+2\right) + C$.
On déduit la solution de l'equation différentielle du problème (P) , $y(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2} - t^2 - 2$.
La condition initiale implique $C = 3$.
Finalement la solution du problème (P) s'écrit $y(t) = 3e^{\frac{1}{2}t^2} - t^2 - 2$.
3. L'erreur globale de la méthode d'Euler est bornée par $\dfrac{Mh}{2L}\left(e^L - 1\right)$ où $M = \max\limits_{t\in[0,1]} |y''(t)|$
Comme $y''(t) = 3e^{\frac{1}{2}t^2} + 3t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2$ et $y'''(t) = 3te^{\frac{1}{2}t^2}\left(t^2+3\right) > 0 \qquad \forall t \in [0,1]$
alors la fonction y'' est croissante sur $[0,1]$ et puisque $y''(0) = 4 > 0$ alors $M = \max\limits_{t\in[0,1]} |y''(t)| = y''(1) = 6e^{\frac{1}{2}} - 2$.
D'où la borne de l'erreur cherchée est: $\left(3e^{\frac{1}{2}} - 1\right)(e-1)\,h$.

Exercice 5

Soit le schéma de Heun défini par la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante,

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))), & n = 0, 1, \ldots \\ y_0 = y(0) \end{cases},$$

pour approcher la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Sous quelle condition sur h, le schéma est-il A-stable?

Solution

Pour $f(t,y) = -\lambda y$, $\lambda > 0$, le schéma s'écrit $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(-\lambda y_n - \lambda(y_n - h\lambda y_n)) = \frac{1}{2} y_n \left(h^2\lambda^2 - 2h\lambda + 2\right)$

La suite y_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}\left(h^2\lambda^2 - 2h\lambda + 2\right)$, le terme général est $y_n = y_0 \left(\dfrac{h^2\lambda^2}{2} - h\lambda + 1\right)^n$.

La condition de stabilité $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ est équivalente à $\left|\dfrac{h^2\lambda^2}{2} - h\lambda + 1\right| < 1$

On pose $x = h\lambda$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 1$.

Une étude de la fonction g permet d'affirmer que $\left|\dfrac{x^2}{2} - x + 1\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

En conclusion, la condition de A-stabilité du schéma est $h < \dfrac{2}{\lambda}$.