Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
08/06/17

L2 MATH /Analyse IV Epreuve finale (durée 02h)

Exercice 01 :05,5 pts

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-|x-1|t}}{t^{3/2}} \; dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ $(\forall \alpha > 1)$.
2) Calculer $F'(x)$ $puis$ $F(x)$ $\forall\, x > 1$, en déduire l'expression de $F(x)$ sans le signe intégrale pour tout $x \in \mathbb{R}$. (On donne $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

Exercice 02 :08 pts

I. Vérifier la convergence et calculer les intégrales impropres suivantes $I = \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt[3]{X(1-X^2)}}$ $J = \int_0^{+\infty} \frac{dY}{1+Y^6}$.

II. Soit φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi\,(x,y) = (X,Y) = \left(\frac{x-y}{x+y}, x^2 - y^2\right)$

1) Déterminer le domaine définition de φ. φ est –elle injective ?
2) Trouver l' ensemble des points tel que φ est un difféomorphisme local.
3) Soit $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 < y < x\}$
   i) Monter que $\varphi(D) =]0,1[\times]0, +\infty[$
   ii) Montrer que φ est une bijection de D vers $\varphi(D)$, déterminer explicitement φ^{-1}

(ind : utiliser X.Y et $\frac{Y}{X}$). En déduire que φ est un difféomophisme global de D vers $\varphi(D)$.

III. Soit l'intégrale double $K = \iint_D \sqrt[3]{\frac{(x-y)^2}{4xy}} . \frac{dxdy}{(1+(x^2-y^2)^6)}$

En utilisant le changement de variables φ, calculer K.(vérifier que K = $\frac{1}{4} I.J$)

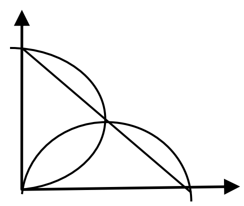
Exercice 03 :06,5 pts

1) Compléter :
   a) Le volume du domaine limité inférieurement par **le plan x+ z = 0**, supérieurement par le plan **x+ z = 3** et entre les cylindres $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16}$ et $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4}$ est

   V= 4 $\int_0 \; d\theta \int \; r\, dr \int_{-rcos\theta} dz$

   b) L'aire du domaine hachuré est

   A =. $\int_0 \; d\theta \int \; r\, dr \; + \; \int \; d\theta \int^{2cos\theta} r\, dr$



2) Ecrire en coordonnées cartésiennes l'intégrale :$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/4} sin\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr$.
3) Ecrire en coordonnées sphériques l'intégrale : $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{y^2+x^2}}^{\sqrt{1-y^2-x^2}} dz$.

Représenter les domaines et leurs projections .

Corrigé

Exercice 01 : 5.5 pts

1) **(3,5pts)** $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-|x-1|t}}{t^{3/2}} \; dt$.

- $f(x,t) = \frac{1-e^{-|x-1|t}}{t^{3/2}} = \frac{1-e^{-(x-1)t}}{t^{3/2}}$ $si\ x \geq \alpha > 1\ et$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{-(x-1)t}}{t^{1/2}}$.
- $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\, dt$ est impropre mixte :$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = +\infty \Rightarrow 0\ est\ un\ point\ singulier$

i) $\exists x_0 = 1\ :\ F(1) = 0$ donc converge.

ii) f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $[\alpha, +\infty[\times]0, +\infty[$

On démontre que $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\, dt$ converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$

iii) $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\, dt = \underbrace{\int_0^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\, dt}_{I:1^{er} esp} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\, dt}_{J:2^{ème} esp}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $\forall x \geq \alpha$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \frac{1}{t^{1/2}} = g(t)$, $\int_0^1 g(t)\ dt$ converge $\Rightarrow$ I CN donc CU sur $[\alpha, +\infty[$.
- $\forall x \geq \alpha$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq e^{-(\alpha-1)t} = g(t)$

$\lim_{t\to+\infty} t^2\ g(t) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} g(t)\ dt$ converge $\Rightarrow$ J CN donc CU sur $[\alpha, +\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\ dt$ converge normalement donc uniformément sur $[\alpha, +\infty[$. ..

<u>Conclusion :</u> F est dérivable $\forall\ x \in [\alpha, +\infty[$ $(\forall \alpha > 1)$ $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\ dt$

2)**(2pts)** $\forall\ x > 1$ $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x-1)t}}{t^{1/2}} dt = \frac{1}{(x-1)^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1/2}} du = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{x-1}}$

On a $\forall\ x > 1$ $F(x) - \underbrace{F(1)}_{0} = \int_1^x \sqrt{\frac{\pi}{u-1}}\ du = 2\sqrt{\pi(x-1)}$.

En posant X=$(x-1) > 0$ et $G(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-|X|t}}{t^{3/2}}\ dt = 2\sqrt{\pi X}$.

G est paire, si X $= (x-1) < 0$ $G(X) = G(-X) = 2\sqrt{-\pi X}$, alors

$\forall\ x < 1$ $F(x) = 2\sqrt{-\pi(x-1)}$ et comme $F(1) = 0$, on déduit : $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ F(x) = 2\sqrt{\pi|x-1|}}$

Exercice 02 : 08 pts

I. $(\mathbf{2}\boldsymbol{pts})$ $I = \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt[3]{X(1-X^2)}} = \int_0^1 f(X)\ dX$ $\lim_{X\to 0} f(X) = \lim_{X\to 1} f(X) = +\infty$.

Alors $0\ \ et\ 1\ sont\ des\ \ points\ singuliers$ .I :2èmeespèce

$f(X) \overset{v(0)}{\sim} \frac{1}{X^{\frac{1}{3}}}$ $\quad et\ \ f(X) \overset{v(1)}{\sim} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}(1-X)^{\frac{1}{3}}}$. $\alpha = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow I\ converge.$

On pose $u = X^2$ $dX = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

$J = \int_0^{+\infty} \frac{dY}{1+Y^6} = \int_0^{+\infty} f(Y)\ dY$ de 1èmeespèce

$f(Y) \overset{v(+\infty)}{\sim} \frac{1}{Y^6}$, $\alpha = 6 > 1 \Rightarrow J\ converge$.

$J = \int_0^{+\infty} \frac{dY}{1+Y^6} = \frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{6sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$.

II. Soit φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi\,(x,y) = (X,Y) = \left(\frac{x-y}{x+y}, x^2 - y^2\right)$

1) Le domaine définition de φ : $D_\varphi = \mathbb{R}^2 - \{(x,y): y = -x\}$ φ n'est pas injective car $\varphi(x,y) = \varphi(-x,-y)$ pour $(x,y) \in D_\varphi$.

2) φ est de classe C[1] dans D_φ car ses deux composantes sont de classe C[1] dans D_φ en plus

$$\det(J_\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{2y}{(x+y)^2} & \frac{-2x}{(x+y)^2} \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = 4\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = 4\frac{x-y}{x+y} \neq 0 \; si \; x \neq y$$

alors φ est un difféomorphisme local sur l'ensemble $\mathbb{R}^2 - \{(x,y): y = \pm x\}$

3) Soit $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 < y < x\}$

i. $\varphi(D) = \left\{(X,Y) = \left(\frac{x-y}{x+y}, x^2 - y^2\right) : (x,y) \in D \right\}$

$\forall (x,y) \in D \quad x > y > 0 \; alors$:.

$$\begin{cases} x^2 > y^2 \Rightarrow Y = x^2 - y^2 > 0 \\ \lim\limits_{y\to x} X = 0 < X < 1 = \lim\limits_{y\to 0} X \; (X \; est \; une \; fonction \; décroissante/y) \end{cases}.$$

ii. $\forall (X,Y) \in \varphi(D) \;\; \exists! \, (x,y) \in D \;\; tel \; que \; (X,Y) = \varphi(x,y)$,en effet :

$$\begin{cases} XY = (x-y)^2 \\ \frac{Y}{X} = (x+y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\left(\sqrt{XY} + \sqrt{\frac{Y}{X}}\right)}{2} \\ y = \frac{\left(-\sqrt{XY} + \sqrt{\frac{Y}{X}}\right)}{2} \end{cases}.$$

Alors $\varphi \; est$ une bijection de D vers $\varphi(D)$. Comme $\varphi \; est \; un$ difféomophisme local dans D, on déduit que $\varphi \; est \; un$ difféomophisme global de D vers $\varphi(D)$.

III. $K = \iint_D \sqrt[3]{\frac{(x-y)^2}{4xy}} \cdot \frac{dxdy}{(1+(x^2-y^2)^6)}$

En utilisant le changement de variables φ,

$$K = \iint_D \sqrt[3]{\frac{(x-y)^2}{4xy}} \cdot \frac{dxdy}{(1+(x^2-y^2)^6)} = \iint_{\varphi(D)} \cdot \frac{X^{\frac{2}{3}}}{(1-X^2)^{\frac{1}{3}}} \frac{\left|\det\left(J_{\varphi^{-1}}\right)\right| dXdY}{(1+Y^6)} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dX}{\sqrt[3]{X(1-X^2)}} \int_0^{+\infty} \frac{dY}{1+Y^6}$$

On a bien K = $\frac{1}{4} I.J = \frac{\pi^2}{12\sqrt{3}}$

Exercice3 :6,5pts

1)

a) Le volume du domaine U limité inférieurement par **le plan x+ z = 0**, supérieurement par le plan **x+ z = 3** et entre les cylindres $\boldsymbol{x^2 + y^2} =$**16** et $\boldsymbol{x^2 + y^2} =$ **4** est

$$V = \iiint_U dxdydz = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_2^4 r \, dr \int_{-rcos\theta}^{3-rcos\theta} dz$$

b) L'aire du domaine hachuré est

$$A = 2\left(\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2sin\theta} r \, dr + \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\frac{2}{sin\theta - cos\theta}}^{2cos\theta} r \, dr \right)$$

2) En coordonnées cartésiennes $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/4} sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr =$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{y^2+x^2}}^{\sqrt{2-y^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz.$$

4) (Facultative)En coordonnées sphériques $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{y^2+x^2}}^{\sqrt{2-y^2-x^2}} dz =$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr.$$