Université de Tlemcen
Département de mathématiques

le 07/06/2011

# Epreuve finale de "Algèbre 4"

## Exercice n° 1

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $F$ un sous espace vectoriel de $E$, montrer que $F^{\perp\perp} = F$

## exercice n° 2

1/ Préciser la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, qui dans la base canonique est représenté par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2/ Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## exercice n° 3

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

1/ Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour $q$.

2/ Déterminer $rg(q)$, $sgn(q)$, le cône isotrope $I(q)$ et une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour $q$ (si elle existe).

## exercice n° 4

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$, $F = \ker(f - I_d)$ ; montrer que $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$.

## exercice n° 5

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $u$ un endomorphisme de $E$

1/ Montrer que $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$

2/ On suppose que $\operatorname{Im} u = \ker u$, montrer alors que $\ker(u + u^*) = \{0\}$

| |
|---|
| Ex1 : 3pts ; Ex2 : 6,5 pts ; Ex3 : 4pts ; Ex4 : 3pts , Ex5 : 3,5 pts |

Bon Courage

# Corrigé de l'épreuve finale de "Algèbre 4" du 07/06/2017

**Exercice ①** : voir Cours 3pts

**Exercice ②** 7pts

1°/ $A^tA = I \Rightarrow A$ est orthogonale i.e $A \in O(3,\mathbb{R})$.
d'autre part $\det A = 1$, par conséquent $A$ représente une rotation d'angle $\theta$ autour de l'axe $E_1$, $\theta$ est donné par $\operatorname{Tr} A = 2\cos\theta + 1$ et $E_1$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Déterminons $\theta$ et $E_1$.

$\operatorname{Tr} A = 0 \Rightarrow 0 = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \xlongequal{\text{Après calculs}} [v] \text{ avec } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $A$ représente une rotation d'angle $\frac{5\pi}{3}$ autour de l'axe engendré par $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2°/ $A$ est symétrique et réelle $\Rightarrow A$ est diagonalisable $\Rightarrow$ les sous espaces propres sont orthogonaux 2 à 2.

$P_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2) \xlongequal{A\text{ diag}} \dim E_0 = 2$ et $\dim E_2 = 1$

$\Rightarrow E_0 = [v_1, v_2]$ et $E_2 = [v_3]$

Comme les sous espaces propres sont orthogonaux 2 à 2 on a
$\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ et $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$, il nous reste l'orthogonalisation de $\{v_1, v_2\}$.
Tout d'abord déterminons $v_1, v_2, v_3$. Après des calculs très simples on trouve $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui sont déjà orthogonaux, on n'a donc pas besoin de Schmidt, par conséquent $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base $(\mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_2)$ orthogonale formée par les vecteurs propres de $A$ avec $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et enfin $\left\{ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée les vecteurs propres de $A$.

**Exercice n° ③** : 4pts

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3$$
$$\Rightarrow q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2x_3,$$

posons $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_2 - x_3 \end{cases} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Après calculs $\Longrightarrow$ $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour $q$.

D'après la réduction de Gauss $q(x) = x_1'^2 + \frac{1}{2} x_2'^2 - \frac{1}{2} x_3'^2$ on voit que $rg(q) = 3$ $sgn(q) = (2,1)$.

$I(q) = \{ x = x_1' v_1 + x_2' v_2 + x_3' v_3 \ / \ x_1'^2 + \frac{1}{2} x_2'^2 = \frac{1}{2} x_3'^2 \}$
$= \{ x = x_1' v_1 + x_2' v_2 + x_3' v_3 \ / \ x_3'^2 = 2 x_1'^2 + x_2'^2 \}$

Si une base orthonormée existe, cela veut dire que dans cette base $q(x)$ s'écrit $q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$, c'est à dire que le $p$ de la signature est égal à 3, or on sait que le $p$ ne depends de la base choisie, comme $p = 2$ contradiction.
Conclusion : une base orthonormée pour $q$ n'existe pas.

Exercice 4 3pts

$f(F^\perp) \subset F^\perp$.

Soit $y \in f(F^\perp) \Rightarrow \exists x \in F^\perp / y = f(x) \Rightarrow \exists x / \langle x, \lambda \rangle = 0 \ \forall \lambda \in F$ et $y = f(x)$
f ortho $\Rightarrow \exists x / \langle f(x), f(\lambda) \rangle = 0 \ \forall \lambda \in F$ et $y = f(x) \Rightarrow \langle y, f(\lambda) \rangle = 0 \ \forall \lambda \in F$
$\Rightarrow \langle y, f(\lambda) \rangle = 0 \ \forall \lambda \in Ker(f - I_d) \rightarrow f(\lambda) - \lambda = 0 \rightarrow f(\lambda) = \lambda$.
$\Rightarrow \langle y, \lambda \rangle = 0 \ \forall \lambda \in F \Rightarrow y \in F^\perp \Rightarrow f(F^\perp) \subset F^\perp$.
d'autre part $f$ endo orthog $\Rightarrow f$ endo bijectif $\Rightarrow \dim f(F^\perp) = \dim F^\perp$.
et $\left. \begin{array}{l} f(F^\perp) \subset F^\perp \\ \dim f(F^\perp) = \dim F^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow f(F^\perp) = F^\perp$.

Exercice n° 5 3pts

1/ Déjà fait dans le partiel.

2/ $x \in Ker(u + u^*) \Rightarrow u(x) + u^*(x) = 0$, or $u(x) \in Im\, u$ et $u^*(x) \in Im\, u^*$
a (1) $\Rightarrow Ker\, u^* = (Im\, u)^\perp \Rightarrow Ker\, u^{**} = (Im\, u^*)^\perp \Rightarrow Ker\, u = (Im\, u^*)^\perp \Rightarrow (Ker\, u)^\perp = Im\, u^*$
$\Rightarrow (Ker\, u)^\perp = Im\, u^*$.
comme $u^*(x) \in Im\, u^* = (Ker\, u)^\perp \xrightarrow{Hyp} (Im\, u)^\perp \Rightarrow u^*(x) \in (Im\, u)^\perp$
d'autre part $u^*(x) + u(x) = 0 \Rightarrow u^*(x) = -u(x) \Rightarrow u^*(x) \in Im\, u$.
$\Rightarrow u^*(x) \in (Im\, u) \cap (Im\, u)^\perp = \{0\} \Rightarrow u^*(x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker\, u$ et $x \in Ker\, u^*$
(1) $\Rightarrow x \in Ker\, u$ et $x \in (Im\, u)^\perp \xrightarrow{Hyp} x \in (Im\, u)$ et $x \in (Im\, u)^\perp \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Ker(u + u^*) = \{0\}$

Rq : petit changement dans le barème : Ex2 : 7pts Ex5 : 3pts
Bonnes vacances pour ceux qui ne passent pas le rattr