Dept. Mathématiques A.U.
2016-2017
Tlemcen

Contrôle de Géométrie
Durée 1h30

Exercice1
On définit une courbe plane paramétrée par

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

a) Trouver les points réguliers de la courbe γ.
b) Calculer la longueur de γ sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$.
c) Calculer la courbure algébrique de γ en un point régulier et ensuite en déduire la courbure.
Exercice2
On considère la courbe $\gamma : R \to R^2$ donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \\ y(t) = t \end{cases}$$

1- Dire pourquoi γ est de classe C^∞. Calculer les composantes de son vecteur dérivé $\gamma'(t)$ et montrer que γ est régulière.
2-La courbe est-elle paramétrée par l'abscisse curviligne (justifier votre réponse)
3-On note par s l'abscisse curviligne donnée par

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du$$

donner les composantes du vecteur tangent unitaire T.
4-Calculer la dérivée de T par rapport à s
5-Calculer de deux manière différente la courbure k en tout point de γ.
Exercice3
Calculer la courbure et la torsion de la courbe paramétrée suivante

$$\gamma(t) = (a(1 - \sin t), a(1 - \cos t), bt)$$

où $a \in R$, $b \in R$.

Correction du contrôle de Géométrie (année 16-17)

Exercice1

a) Points réguliers de la courbe γ.

Les points singuliers sont solutions de l'équation $\gamma'(t) = 0$ i.e.

$$\begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$t = k2\pi \quad \text{avec } k \in Z.$$

L'ensemble des points réguliers est donc

$$R - \{k2\pi : k \in Z\}.$$

b) Longueur de la courbe γ.

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt \end{aligned}$$

et en tenant compte de la formule

$$1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$$

on obtient

$$l(\gamma) = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \left[\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8.$$

c) Calcul de la courbure

La courbure algébrique est donnée par

$$\overline{\kappa}(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma"(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}}{2\sqrt{2}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}$$

la courbure (coubure géométrique) est donnée par

$$\kappa(t) = |\overline{\kappa}(t)| = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}.$$

Exercice2

1) Comme les composantes du vecteur $\gamma(t)$ sont polynomiales $\gamma(t)$ est de classe C^{∞} de plus

$$\gamma'(t) = (-t, 1)$$

et $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2} \neq 0$. Ce qui montre que γ est régulière.

2) Puisque $\|\gamma'(t)\| \neq 1$, la courbe γ n'est pas paramétrée par l'abscisse curviligne.

3) Composantes du vecteur tangent unitaire.

Nous allons d'abord reparamétriser γ par l'abscisse curviligne ce qui nous mène à poser

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du.$$

Une paramétrisation de γ par l'abscisse curviligne est alors

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma o s^{-1}(s)$$

et le vecteur tangent unitaire est

$$\begin{aligned} T(s) &= \gamma'\left(s^{-1}(s)\right) . \left(s^{-1}(s)\right) \\ &= \in . \frac{1}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \left(\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right). \end{aligned}$$

Exercice3

Courbure et torsion de γ

Nous avons

$$\gamma'(t) = (-a\cos t, a\sin t, b), \gamma''(t) = (a\sin t, a\cos t, 0), \gamma'''(t) = (a\cos t, -a\sin t, 0)$$

et

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{vmatrix} -a\cos t & a\sin t & b \\ a\sin t & a\cos t & 0 \end{vmatrix} = \left(-ab\cos t, ab\sin t, -a^2\right)$$

ce qui donne

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{a\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

et

$$\tau(t) = -\frac{\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\right)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = -\frac{\begin{vmatrix} -a\cos t & a\sin t & a\cos t \\ a\sin t & a\cos t & -a\sin t \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix}}{a^2\left(a^2+b^2\right)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$