Université de Tlemcen
Faculté des Sciences 11/05/2017
Département de Mathématiques
L2-Math / Analyse IV **(durée 2h)**

Contrôle continu

<u>Exercice 1 :</u>12 points

I.

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y,z) = x^4 + 7x^2y - 6yz + y^3 + z^3$

1) Montrer que f est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice Hessienne de f aux points $(0,0,0)\ et\ (0,2,2)$.

2) Déterminer les extrema locaux de f, admet-elle un maximum ou un minimum global ?

3) Etant donnée l'équation $f(x,y,z) = 0$, montrer qu'on peut expliciter z en fonction de x et y au voisinage du point$(1,0,-1)$. Soit $z = \varphi(x,y)$, écrire le développement limité à l'ordre 1 de φ au voisinage du point $(1,0)$

II.

Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y,0)}{2(x^2+y^2)} = \frac{x^4+7x^2y+y^3}{2(x^2+y^2)} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Etudier la continuité de g dans $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer l'existence des dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$ .Calculer $\nabla g(0,0)$.

3) Etudier la différentiabilité de g au point$(0,0)$. g est-elle de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$?

4) Calculer $D_{\vec{v}}g(0,0)$ où $\vec{v} = (cos\theta, sin\theta)$ dans quelle direction est elle maximale? donner sa valeur.

<u>Exercice 2</u> : 04 points

Trouver toutes les fonctions de classe C^1 $f\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\ \frac{\partial f}{\partial y}\ = \sqrt{x^4 + y^4}$.

On utilisera le changement de variables$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$.(Vérifier que $\sqrt{x^4+y^4} = \frac{v}{(1+u^2)}\sqrt{1+u^4}$)

<u>Exercice3:</u>04 points

Soient $f\colon\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $h : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que :

$h(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctan\frac{y}{x}\right)$ et $J_f\left(1, -\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Soit $g = f°h$,montrer que g est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et déterminer $dg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ Calculer la dérivée de g au point $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ suivant la direction $V(0,-1)$.

Corrigé

Exercice 1 : **Exercice 1 :**12 points

I. 7pts

$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}:\ f(x,y,z) = x^4 + 7x^2y - 6yz + y^3 + z^3$

$(\mathbf{02.75}\boldsymbol{pts})$ 1) f est une fonction polynomiale dans $\mathbb{R}^2$ alors elle est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 14xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 7x^2 + 3y^2 - 6z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 6y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 14y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\ , \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 14x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = -6 \end{cases}.$$

la matrice Hessiennne de f est $H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 + 14y & 14x & 0 \\ 14x & 6y & -6 \\ 0 & -6 & 6z \end{pmatrix}$

$H_f(0{,}0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ et $H_f(0{,}2{,}2) = \begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix}$.

(2.75pts) 2)

Les points critiques de f sont solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2x^2 + 7y) = 0 \ldots.\ldots..(1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 7x^2 + 3y^2 - 6z = 0\ \ldots\ldots(2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 6y = 0 \ldots\ldots..\ \ ..\ (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow y = \frac{z^2}{2}$.

$(1) \Rightarrow x = 0$ ou $2x^2 + 7y = 0$.

- si $x = 0\ , (2) \Rightarrow 3y^2 - 6z = 0\ \Rightarrow y^2 = 2z = 0$.

Alors d'après (3) $z^4 - 8z = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z = 2$

- si $2x^2 + 7y = 0$ d'après $(3) 2x^2 + 7y = 2x^2 + \frac{7z^2}{2} = 0$ alors $x = z = y = 0$.

Ainsi on obtient deux points critiques : $(0{,}0{,}0)\ et\ (0{,}2{,}2)$.

- $H_f(0{,}0{,}0)$ admet une valeur propre nulle (H_f est indéfinie) on utilise la définition d'extrémum :

$f(x,y,z) - f(0{,}0{,}0) = f(x,y,z)$ change de signe au voisinage de $(0{,}0{,}0)$.
En effet, $\forall y \in \mathcal{V}(0)\qquad f(0,y,0) = y^3\ est\ de\ même\ signe\ que\ y$ alors le point $(0{,}0{,}0)$ est un point selle.

- $H_f(0{,}2{,}2)$ admet trois valeurs propres strictement positives :$\lambda_1 = 28, \lambda_2 = 6\ et\ \lambda_3 = 18$.
  Ou bien la forme quadratique Q associée à $H_f(0{,}2{,}2)$ s'écrit :
  $Q(X,Y,Z) = 28X^2 + 12\left[\left(Y - \frac{Z}{2}\right)^2 + \frac{3Z^2}{4}\right]$ donc définie positive
  alors $f(0{,}2{,}2)$ est un minimum local.
- Comme $\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y,0) = \pm\infty\ alors$ f n'admet pas d'extrémum global .

(1.5) pts 3) Vérifions les conditions du théorème des fonctions implicites au voisinage du point$(1, 0, -1)$.

- $f(1, 0, -1) = 0,$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, -1) = 3 \neq 0$

  Alors on peut expliciter z en fonction de x et y au voisinage du point$(1, 0, -1)$.

$\exists V=\mathcal{V}\big((1,0)\big)$, W = $\mathcal{V}\big((-1)\big)$ et $\varphi: V\to W$ *de classe* C^1 telle que :

$\forall(x,y)\in V, f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)=0$ et $\varphi(1,0)=-1$

Soit $F(x,y)=f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)=0$ *alors* $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}=0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}=0$, d'où **0.25 +0.25** $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,0)=-\frac{4}{3}$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,0)=-\frac{13}{3}$

Le développement limité à l'ordre 1 de φ au voisinage du point $(1,0)$:

$\varphi(x,y)=-1-\frac{4}{3}(x-1)-\frac{13}{3}y+\|(x-1,y)\|\varepsilon\big((x-1,y)\big)$ avec

$$\lim_{\|(x-1,y)\|\to 0}\varepsilon\big((x-1,y)\big)=0$$

II. 5pts

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+7x^2y+y^3}{2(x^2+y^2)} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) **(1pt)** Continuité de g :

* g est fraction rationnelle donc continue dans $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$
* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+7x^2y+y^3}{2(x^2+y^2)}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(rcos^4\theta+7cos^2\theta.sin\theta+sin^3\theta)}{r^2}=0.$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=g(0,0)$ alors g est continue au point $(0,0)$.

Ainsi g est continue dans $\mathbb{R}^2$.

2) **(2pt)**

Dans $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ $\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{14xy^3+4x^3y^2+14x^3y+2x^5-14x^3y-2xy^3}{2(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{y^4+7x^4-4x^2y^2-2x^4y}{2(x^2+y^2)^2}\end{cases}$.

$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3}=0.$

$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{y^3}{2y^3}=\frac{1}{2}.$

$$\nabla g(0,0)=\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

3) **(1pt)** La différentiabilité de g au point$(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)-g(0,0)-x\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^4+7x^2y+y^3}{2(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3(rcos^4\theta+7cos^2\theta.sin\theta+sin^3\theta)}{2r^3}-\frac{rsin\theta}{2r}=\frac{7cos^2\theta.sin\theta+sin^3\theta-sin\theta}{2}.$$

dépend de θ ,alors la limite n'existe pas d'où f n'est pas différentiable au point $(0,0)$ on conclue donc que g n' est pas de classe C[1] dans $\mathbb{R}^2$.

4) $(\mathbf{1pt})D_{\vec{v}}g(0,0)=<\nabla g(0,0),v>=\frac{sin\theta}{2}$ est elle maximale dans direction du gradient qui est égale à $\frac{\pi}{2}$ .la valeur maximale est $\frac{1}{2}$.

Exercice2: $(\mathbf{4pt})$

$f(x,y)=F(u,v)$

$(\mathbf{1pt})\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\ (2x)\ \ et(\mathbf{1pt})\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\ (2y)$

$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\ \frac{\partial f}{\partial y}\ =2v\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{v}{(1+u^2)}\sqrt{1+u^4}$. $(\mathbf{1pt})$**(avec vérification de** $\sqrt{x^4+y^4}=\frac{v}{(1+u^2)}\sqrt{1+u^4}$)

$\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{1}{2(1+u^2)}\sqrt{1+u^4}\ \Rightarrow F(u,v)=\frac{v}{2(1+u^2)}\sqrt{1+u^4}+\varphi(u)$ *où φ est une fonct*ion de classe C[1]

$(\mathbf{1pt})$ L'ensemble des solutions de classe C[1] sur $R_+^*\times R$

$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{2}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ où φ de classe C1.

Exercice 3: $(\mathbf{4pt})$

$f:\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $h : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que :

$h(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctan\frac{y}{x}\right)$ et $J_f\left(1,-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

- **0.25pt** h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ puisque ses deux composantes sont de classe C^1
- $(\mathbf{1.5pt})$ $J_h = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ $J_h\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- **0.25pt** $g = f°h$ est la composée de deux fonctions de classe C^1 alors elle l'est aussi dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

  0.25pt $dg(x,y) = df\big(h(x,y)\big)odh(x,y)$ et $J_g(x,y) = J_f\big(h(x,y)\big).\, J_h(x,y)$.

- $(\mathbf{1pt})$ $J_g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = J_f\left(1,-\frac{\pi}{4}\right).\, J_h\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right). = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- **(0.25pt)**$dg\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \to \mathbb{R}^3\right)$sa matrice associée est $J_g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.
- **(0.50pt)**$D_v g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = J_g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$