Université de Tlemcen. | le 10/05/2017
Département de mathématiques. | durée : 2 heures

Partiel de "Algèbre 4"

Exercice n° 1

Soit $A \in O(3, \mathbb{R})$; $A \neq \pm I$

1°/ Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A alors $\lambda = \pm 1$.

2°/ Montrer que si $\det A = 1$, $\lambda = 1$ est une valeur propre de A de multiplicité 1 ou 3.

Exercice n° 2

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme orthogonal de E, $\{e_i\}$ une base orthonormée de E, $A = M(f)_{e_i}$.
Montrer que ${}^tA . A = I$

Exercice n° 3

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme symétrique de E. Montrer qu'il existe un sous espace vectoriel H de E tel que $\dim H = n-1$ et $f(H) \subset H$.

Exercice n° 4

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1°/ Montrer que

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, g) \longmapsto \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t) \cdot dt$$

définit un produit scalaire sur E

2°/ Soient $I = \{f \in E / f \text{ est impaire}\}$ et $P = \{f \in E / f \text{ est paire}\}$ montrer que $P \subset I^{\perp}$

Exercice n° 5

1°/ Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E, $F = \operatorname{Ker}(f - I_d)$, montrer que $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$

2°/ Soit g un endomorphisme d'un espace euclidien E, montrer que $\operatorname{Ker} g^* = (\operatorname{Im} g)^{\perp}$

Ex1 : 4pts ; Ex2 : 3pts ; Ex3 : 4pts ; Ex4 : 4pts ; Ex5 : 5pts. Bon Courage

Corrigé du partiel de Algèbre 4 du 10/05/2017.

Exercices ① et ② : voir cours.

Exercice n°③

Soit λ une valeur propre de $f \Rightarrow \exists x \in E\ (x \neq 0) \,/\, f(x) = \lambda x$.

$\dim [x] = 1 \Rightarrow \dim [x]^{\perp} = n-1$, posons $H = [x]^{\perp}$,

H est donc un sous espace vectoriel de E de dim $n-1$,

montrons que $f(H) \subset H$. ie: $y \in f(H) \Rightarrow y \in H$.

$y \in f(H) \Rightarrow \exists t \in H \,/\, y = f(t)$, pour montrer que $y \in H = [x]^{\perp}$, il suffit de montrer que $\langle y, x \rangle = 0$.

En effet : $\langle y, x \rangle = \langle f(t), x \rangle \overset{f\,sym}{=\!=} \langle t, f(x) \rangle \overset{f(x)=\lambda x}{=\!=} \langle t, \lambda x \rangle$

$= \lambda \langle t, x \rangle = \lambda . 0 = 0$ car $t \in H = [x]^{\perp}$ et $x \in [x]$,

$\Rightarrow \langle y, x \rangle = 0 \Rightarrow y \in [x]^{\perp} \Rightarrow y \in H$, par conséquent $f(H) \subset H$.

Exercice n°④

1°/ Symetrie, bilinéarité et positivité : évidentes

* $\varphi(f, f) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt = 0 \xrightarrow{f^2(t) \text{ cont et } \geq 0} \forall t \in [-1,1]\ f(t) = 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$

* $f \equiv 0 \Rightarrow \varphi(f, f) = 0$ dc. $\varphi(f,f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

cl. φ est définie positive, par conséquent φ définit un P.S sur E.

2°/ Soit $f \in P$, pour montrer que $f \in I^{\perp}$ il suffit de montrer que

$\langle f, g \rangle = 0 \quad \forall g \in I$, en effet. $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) . g(t)\, dt = 0$.

car $t \to f(t) g(t)$ est impaire et les bornes -1 et 1 sont opposées

exercice n°⑤

1°/. Montrons tout d'abord que $f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$ ie $y \in f(F^{\perp}) \overset{?}{\Longrightarrow} y \in F^{\perp}$

$y \in f(F^{\perp}) \Rightarrow \exists x \in F^{\perp} \,/\, y = f(x)$, prenons $z \in F$ et montrons que $\langle y, z \rangle = 0$

$\langle y, z \rangle = \langle f(x), f(z) \rangle$ car $z \in F = \mathrm{Ker}\,(f - I_d) \Rightarrow f(z) - z = 0 \Rightarrow f(z) = z$

$\overset{f\,orthog}{=\!=\!=} \langle x, z \rangle = 0$ car $x \in F^{\perp}$ et $z \in F$ par conséquent.

$\langle y, z \rangle = 0$ ce qui implique que $y \in F^{\perp}$ cl: $f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.

d'autre part $\dim f(F^{\perp}) = \dim F^{\perp}$ (f linéaire bijective !

on conclut que $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$.

2°/ $\subset$: $x \in \mathrm{Ker}\, g^* \overset{?}{\Longrightarrow} x \in (\mathrm{Im}\, g)^{\perp}$, prenons $x \in \mathrm{Ker}\, g^*$ et $y \in \mathrm{Im}\, g$

et mq $\langle x, y \rangle = 0$. $y \in \mathrm{Im}\, g \Rightarrow \exists a \in E \,/\, y = g(a)$.

$\langle x, y \rangle = \langle x, g(a) \rangle = \langle g(a), x \rangle = \langle a, g^*(x) \rangle = \langle a, 0 \rangle$ car $x \in \mathrm{Ker}\, g^*$

$= 0 \Rightarrow x \in (\mathrm{Im}\, g)^{\perp}$.

d'autre part. $x \in (\mathrm{Im}\, g)^{\perp} \Rightarrow \forall a \in E\ \langle x, g(a) \rangle = 0$ or $\langle x, g(a) \rangle = \langle g(a), x \rangle$

$= \langle a, g^*(x) \rangle = 0 \Rightarrow \forall a \in E\ \langle a, g^*(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle g^*(x), g^*(x) \rangle = 0 \Rightarrow g^*(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, g^*$