Université Abou Bekr Belkaid 2016/2017
Département de Mathématiques
Module: Analyse numérique 1
Feuille de TP N°1 **Interpolation polynomiale**

1. Les polynômes sous Matlab

Dans matlab, un polynôme est représenté par le vecteur de ses coefficients, commençant par le degré le plus élevé.

Exemple:

Soit le polynôme: $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, il sera représenté par le vecteur P:
>> P = [3 -5 2]
P = 3 -5 2

Pour évaluer le polynôme en x_0, on utilise la fonction **polyval**. Pour calculer P(5) :
>> polyval(P,5)
ans = 52

polyval accepte aussi des vecteurs de points à évaluer. ;
Dans ce cas, elle renvoit une vecteur de taille identique contenant la valeur du polynôme pour chaque valeur du vecteur d'entrée
>> x = [-1:0.1:2];
>> y = polyval(P,x);

Cela permet de faire des graphes facilement.
>> plot(x,y);

On aurait pu écrire directement:
>> plot([-1:0.1:2],polyval(p,[-1:0.1:2]))

La commande **roots** permet de retrouver les racines du polynôme (quelles soient réelles ou complexes):
>> racines = roots(p)
racines =
1.0000
0.6667

A l'inverse, la fonction **poly** permet de créer un polynôme à partir de ces racines:
>> P3 = poly([1 -1])
P3 = 1 0 -1

La fonction **polyder** calcule la dérivée d'un polynôme.
Les fonctions **conv** et **deconv** multiplient ou divisent deux polynômes.

Exercice 1

Soit les polynômes: $a(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ et $b(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 16$
a- Multiplier ces deux polynômes.
b- Additionner ces polynômes,soit $d(x)$ le polynôme obtenu.
c- Soit $c(x)$ le polynôme obtenu après la multiplication de $a(x)$ et $b(x)$, faire la division de $c(x)$ par $b(x)$.
d- tracer la courbe:$b(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 16$
e-Déterminer le polynôme $e(x)$ somme des polynômes $c(x)$ et $d(x)$. Attention: ces deux polynômes sont d'ordres différents.

Exercice 2 différentes manières d'évaluer un polynôme

On souhaite programmer l'algorithme d'Horner qui permet de calculer plus rapidement la valeur d'un polynôme P en un point x.

1- A la main, calculer $P(x) = 3x^3+2x^2-x+4$ pour $x = 2$ de façon classique puis en utilisant l'algorithme d'Horner.
Quelle est la méthode que vous trouvez la plus rapide?
2- Ecrire la fonction classique dépendant de P et de x qui calcule la valeur de $P(x)$ de façon classique.
3- Ecrire une fonction horner,dépendant de P et de x qui calcule la valeur de $P(x)$ avec l'algorithme d'Horner.
4- Verifier vos programmes, avec la fonction de matlab Polyval.
5- Comparer le temps de calcul de Polyval, classique et horner pour:
$P(x) = 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 2x + 1$ et $x = 3$.

2. Interpolation polynomiale : matrices de Vandermonde

On cherche l'unique polynôme de degré n passant par les points (x_i, y_i) pour$i = 0, ..., n$, en supposant les x_i tous distincts.

Le polynôme d'interpolation peut donc s'écrire: $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

tel que pour tout i, $p_n(x_i) = y_i$, soit en notation matricielle à l'aide de la matrice de Vandermonde :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Exemple d'interpolation

On cherche à déterminer le polynôme de degré 3
$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
passant par les points $(-2, 10), (-1, 4), (1, 6)$ et$(2, 3)$.
Les a_i peuvent être déterminés par la résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solution de ce système peut être obtenue de la façon suivante :
y = [10;4;6;3];V= [1,-2,4,-8;1,-1,1,-1;1,1,1,1;1,2,4,8];a = V\y;
La matrice de Vandermonde V peut être déterminée à partir du vecteur x de la façon suivante
v=vander(x)
Ecrivez une fonction vandermonde qui prend comme arguments deux vecteurs x et y et qui renvoie un vecteur a tel que pour tout i, $p_n(x_i) = y_i$, *function a=vandermonde(x,y)*
Vérifier que a s'obtient aussi par *v=polyfit(x,y',length(x)-1)*

3. Interpolation polynomiale: la formule de Lagrange

1− Programmer une fonction Matlab interpolL (*function u=interpolL(x,y,z))* donnant $u = p(z)$ où p est le polynôme d'interpolation aux points de x pour les valeurs de y calculé par la formule de Lagrange.
2− Appliquer la question précédente à la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec des points d'interpolation équidistants; utiliser la fonction **linspace** pour les définir.
3− Tracer la fonction considérée et le polynôme sur le même graphique. Mettre en évidence la convergence des polynômes vers la fonction exponentielle.