Département de Mathématiques 2016/2017
Module: Analyse numérique 1
Fiche de TD N°5

Résolution des équations non linéaires

Exercice 1
Quel est le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une approximation à 10^{-4} près, de la solution de $x^3 - x - 1 = 0$ appartenant à l'intervalle $[1, 2]$ avec la méthode de bissection? Calculer cette approximation.

Exercice 2
L'équation $x^2 = \ln(x+1)$ admet une solution unique dans $[-1/4, 1/4]$
1- Déterminer une formule itérative du point fixe qui converge vers cette solution. Justifier.
2- Utiliser cette formule pour donner une borne de l'erreur sur l'approximation x_7 si $x_0 = 0.2$.
3- Calculer le nombre d'itérations de point fixe n nécessaires pour obtenir une précision inférieure à $\varepsilon = 10^{-5}$ si $x_0 = 0.2$.

Exercice 3
Considerons l'équation non linéaire $x = g(x)$ où $g \in C[a, b]$. Nous savons que si $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$ alors g admet un point fixe dans $[a, b]$.
1- Montrer que si $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in [a, b]$ alors ce point fixe est unique.
2- Montrer que $g(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ admet un point fixe unique dans $[-0.5, 0.5]$ mais que la suite définie par $x_{n+1} = \dfrac{3x_n}{x_n+1}, n \geq 0$ ne converge pas vers ce point fixe pour tout choix de x_0 $[-0.5, 0.5]$.

Exercice 4
On propose la méthode numérique $x_{n+1} = x_n + \alpha(x_n^2 + 2)$ avec $x_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x^2 - 2)$.
1- Montrer que la méthode ne peut converger que si $\alpha < 0$.
2- Soit $x_0 \in [1, 2]$.
 a) Montrer que la suite (x_n) converge si $\alpha > -\frac{1}{2}$.
 b) Donner sa limite. Soit l cette limite.
3- En calculant $\varphi'_\alpha(l)$, trouver la valeur de α qui assure la convergence la plus rapide.

Exercice 5
On considère la fonction à valeurs réelles:
$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln x - 1 \text{ dans l'intervalle } I = \left[\frac{1}{\sqrt{e^5}}, 2\right].$$
1- Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans l'intervalle I et qu'il est unique.
2- Pour approcher le zéro α on considère les méthodes de point fixe
$$x_{n+1} = \phi_i(x_n), i = 1, 2, 3, \text{ avec}$$
$$\phi_1(x) = -x - x\ln x; \qquad \phi_2(x) = x - \frac{1}{2}\ln x - 1; \qquad \phi_3(x) = -\frac{1}{2}x\ln x.$$
Etablir si les trois méthodes sont convergentes et, en cas affirmatif, en établir l'ordre de convergence.
3- Pour la méthode ϕ_3, montrer que dans son intervalle de convergence globale on a la relation suivante:
$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C\,|x_n - \alpha|, \qquad C < 1$$
et proposer une estimation de C.

4- Pour la méthode de fonction ϕ_3, déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-6}.

Exercice 6

I- On considère la fonction $\phi_a(x) = x + a(\tan(x) - 1), a \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $[0, \pi/2[$.
Montrer que ϕ_a admet $y = \pi/4$ comme point fixe. Pour quelle valeurs du paramètre a ce point fixe est-il attractif?

II- Soit b un réel strictement positif. On considère la suite

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{b}{u_n}\right) \text{ pour } n \geq 1, u_0 > 0.$$

a) Quelles sont les limites possibles de u_n?

b) On suppose que $u_0 \in I = \left[\sqrt{b}, +\infty\right[$. Montrer qu'alors $u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que si $u_0 \in I$ la suite u_n est décroissante. Conclusion?

d) On suppose que $u_0 \in I$ dans la suite de l'exercice. Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{b}{x}\right)$.
Calculer $f\ '(x)$. Montrer alors que $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{2}|x - y| \qquad \forall x, y \in I$.

e) Soit l la limite de u_n. Déduire de la question précédente que $|u_n - l| < \dfrac{1}{2^n}|u_0 - l|$.

f) On veut montrer que la convergence de u_n vers l est en fait beaucoup plus rapide que ce que laisse penser la dernière inégalité pour u_0 proche de l. Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 - b$

i) Donner l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$.

ii) Déduire la convergence de la méthode de Newton.

iii) Montrer que pour u_k suffisament proche de l, que

$$l - u_{k+1} = -\frac{1}{2g\ '(u_k)}g"(u_k + \theta(l - u_k))(l - u_k)^2, 0 < \theta < 1,$$

et en conclure que l'ordre de convergence de la méthode de Newton est deux.

Exercice 7

Montrer que si α est une racine double de l'équation $f(x) = 0$, alors $g'(\alpha) = \frac{1}{2}$,où g est la fonction itérative de Newton.
Montrer que la formule itérative modifiée $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ a une convergence quadratique.
Utiliser les trois premières itérations pour approcher la solution de $\sin x = 1$, avec $x_0 = 1.5$.

Exercice 8

1. Soit $f(x) = (x-1)^{10}$ et $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ une suite convergente vers la racine $\alpha = 1$ de $f(x) = 0$. Montrer que $|f(x_n)| < 10^{-3}$, pour $n > 1$ mais $|x_n - \alpha| < 10^{-3}$ nécessite $n > 1000$ itérations.
2. Montrer que les suites suivantes convergent linéairement vers $\bar{x} = 0$. Déterminer n pour que $|x_n - \bar{x}| < 5.10^{-2}$.
   $i) \qquad x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \qquad ii) \qquad x_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$
3. Montrer que la suite $x_n = 10^{-2^n}$ converge quadratiquement vers 0.
4. Montrer que la suite $x_n = 10^{-n^k}$ ne converge pas quadratiquement vers 0.

Exercices proposés dans les examens des années précédentes

Exercice 1

Soit f la fonction telle que

$$f(x) = x\ln(x), \qquad x \in [1, +\infty)$$

1. Montrer que f est une bijection de $[1, +\infty)$ sur $[0, +\infty)$.
2. Que vaut $f^{-1}(e)$?
3. Soit $\varphi(x) = \dfrac{a}{\ln x}, a \in [0, +\infty)$. Montrer que $f^{-1}(a)$ est un point fixe de φ.
4. Pour quelles valeurs de $a \in [0, +\infty)$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge-t-elle lorsque la valeur initiale x_0 est choisie proche de $f^{-1}(a)$?

Exercice 2

On veut calculer le zéro α de la fonction $f(x) = x^3 - 2$, en utilisant la méthode du point fixe suivante:

$$x_{n+1} = x_n(1 - \frac{\omega}{3}) + x_n^3(1 - \omega) + \frac{2\omega}{3x_n^2} + 2(\omega - 1), \qquad n \geq 0$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre ω, le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode proposée?
2. Pour quelles valeurs de ω, la méthode proposée est-elle d'ordre 2?
3. Existe-t-il une valeur de ω telle que l'ordre de la méthode du point fixe soit supérieur à 2?

Exercice 3

Résoudre l'équation $3x - x^2 + e^x - 2 = 0$, sur l'intervalle $[0, 0.5]$ avec une méthode de point fixe et une précision de 10^{-2}.

Pour cela vous devez : Définir la méthode de point fixe. Démontrer l'existence et l'unicité du point fixe. Démontrer la convergence de la méthode. Donner le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la précision désirée. Faire les calculs.

Exercice 4

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 - \ln x}, \forall x > 0; \varphi(0) = 0 \text{ et } b = e^{(1-\sqrt{5})/2}.$$

Le théorème du point fixe est-il applicable à la fonction φ sur $[0, b]$?

Exercice 5

Pour trouver la solution α de $f(x) = 0$, on propose la méthode itérative suivante:

$x_{n+1} = x_n - \omega \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, où $\omega > 0$ un nombre donné.

Supposons que $f'(x)$ est continue et que $f'(\alpha) \neq 0$. Pour quelles valeurs de ω la méthode converge-t-elle vers α pour x_0 suffisamment proche de α?

Exercice 6

Pour approcher $\sqrt{2}$, on considère l'equation $x^2 = 2$ et on définit la méthode du point fixe $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.

1) Montrer que:$\forall\, x_0 \in [1, 2]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers $\sqrt{2}$.

2) Estimer le nombre d'itérations nécessaires pour évaluer $\sqrt{2}$ à partir de $x_0 = 1$ avec une précision de 10^{-100}.

Exercice 7

Soit à résoudre $\ln(x) + x = 0$.

1- Montrer que cette équation a une solution unique sur $[0, 1]$.

2- Par dichotomie, calculer la racine avec une précision de 10^{-2}. Combien d'itérations sont-elles nécessaires? Pouvait-on le prévoir?

3- Par la méthode de Newton (en partant de 1), calculer la racine avec une précision de 10^{-2}. Combien d'itérations sont-elles necessaires? Comparer avec le résultat précédent.

Exercice 8

On suppose que $f(x) = \frac{1}{x} - 3$. Soit x_n la suite engendrée par la méthode de Newton à partir de $x_0 = c$.

1- Montrer que l'erreur $e_n = x_n - \frac{1}{3}$ satisfait la relation $e_{n+1} = -3e_n^2$.

2- Conclure que la méthode de Newton converge si $0 < c < \frac{2}{3}$.Que ce passe-t-il si $c = \frac{2}{3}$?

Exercice 9

Considerons l'équation non linéaire $x = g(x)$ où $g \in C\,[a, b]$. Nous savons que si $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$ alors g admet un point fixe dans $[a, b]$.

1- Montrer que si $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in [a, b]$ alors ce point fixe est unique.

2- Montrer que $g(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ admet un point fixe unique dans $[-0.5, 0.5]$ mais que la suite définie par $x_{n+1} = \dfrac{3x_n}{x_n+1}, n \geq 0$ ne converge pas vers ce point fixe pour tout choix de x_0 $[-0.5, 0.5]$.

Exercice 10

Montrer que $\alpha = 1$ est une racine multiple de l'équation: $e^{x-1} - x = 0$.

Utiliser une formule itérative qui converge quadratiquement vers α pour calculer x_1à partir de $x_0 = 0$.

Exercice 11

1- Soit une suite (x_n) convergeant vers x^*.On suppose que pour tout $n \geq 1$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k\,|x_n - x_{n-1}| \qquad \text{où } k < 1.$$

Montrer que

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0|$$

2- Pour calculer la racine x^* de $x^2 - 3x - 1 = 0$ sur $[-1, 1]$, on pose $g(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ pour appliquer une méthode de point fixe $x = g(x)$.

a- Montrer que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec $x_0 \in [-1, +1]$, converge vers un unique point fixe $x^* \in [-1, 1]$.

b- Soit $x_0 = 0$, quel est le nombre d'itération de point fixe n nécessaires pour obtenir une précision inférieure à $\epsilon = 10^{-3}$ pour le calcul de x^*.

Exercice 12

On considère l'équation $1 - 3e^{-x} = 0$ pour $x \in [1, 2]$

1- Donner la suite engendrée par la méthode de Newton?

2- Analyser la convergence de cette méthode.

3- Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton?