Université Abou Bekr Belkaid — 2016/2017

Département de Mathématiques — Module: Analyse numérique 1

TD N°4 — **Dérivation numérique**

Exercice1

Considérons les données expérimentales:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20
$f(x)$	0.4430	0.5558	0.6754	0.8040	0.9447

Utiliser les 2 formules de différences finies d'ordre 1 et la formule de différences finies centrée d'ordre 2 afin d'estimer $f\,'(1.10)$ et $f\,'(1.15)$.

Sachant que la fonction est $f(x) = \ln(\tan x)$, comparer les résultats avec les valeurs exactes (erreur absolue et relative).

Exercice 2

Considérons 3 points équidistants x_0, x_1, x_2, auxquels on connait les valeurs de $f(x)$.

Construire le polynôme de Lagrange d'ordre 2 sous sa forme:

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x).$$

Expliciter le terme de l'erreur commise en approximant $f(x)$ par le polynôme $p_2(x)$.

1- Dériver le polynôme d'approximation $p_2(x)$obtenu ci-dessus et l'utiliser afin d'obtenir une formule pour estimer la dérivée première de $f(x)$ en x_2. Quelle est l'ordre de cette approximation?

2-Utiliser la formule obtenue ci-dessus pour approximer $f'(1.10)$(exercice1). Calculer l'erreur relative et comparer aux résultats obtenus dans l'exercice1.

Exercice 3

Soit la différence centrée: $f''(x) \simeq \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$.

a) Obtenir l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor appropriés.

b) Utiliser cette formule de différences pour obtenir une approximation de $f''(2.0)$ pour la fonction tabulée suivante, en prenant d'abord $h = 0.2$, ensuite $h = 0.1$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.8	1.58779	2.1	1.74194
1.9	1.64185	2.2	1.78846
2.0	1.69315		

Exercice 4

1. Analyser les erreurs d'arrondi pour la formule:

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_0)$$

2. Trouver une valeur optimal de $h > 0$ pour la fonction donnée dans l'exercice 1.

Exercice 5

On suppose que $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est suffisament régulière et que $x \in]a, b[$.

1) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 5 pour f aux points $x+2h, x+h, x-h$ et $x-2h$, $h > 0$.

2) Trouver une formule de la forme

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}(\alpha f(x+2h) + \beta f(x+h) + \gamma f(x-h))$$

qui soit d'ordre 2. En existe-t-il d'autres?

3) Trouver une formule de la forme

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}(\alpha f(x+2h) + \beta f(x+h) + \gamma f(x-h) + \delta f(x))$$

qui soit d'ordre 3.

4) Montrer que les formules suivantes sont d'ordre 4.

$$f'(x) \simeq \frac{1}{12h}(-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h))$$

$$f''(x) \simeq \frac{1}{12h^2}(-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h))$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange pour approcher $f'(x_0)$ en fonction des valeurs de f aux points $x_0 - h, x_0$ et $x_0 + 2h$. Quelle est l'ordre de cette formule? justifier votre réponse de deux manières différentes.

Exercice 2

Calculer à partir de la table suivante la dérivée première et la dérivée seconde de $y = f(x)$ au point $x = 0.6$

x	0.4	0.6	0.7
y	2.9836	3.6442	4.0275

Sachant que $f(x) = 2e^x$ donner une majoration de l'erreur dans chaque cas.

Exercice 3

Soit $h > 0$ et étant données les valeurs $f(0), f(h)$ et $f(3h)$ de la fonction $f(x)$.

1- Construire le polynôme d'interpolation $p(x)$ de la fonction f aux points $x = 0, h$ et $3h$ sous la forme de Lagrange.

2- Calculer l'approximation $f'(x) \simeq p'(x)$.

3- En supposons que la fonction f est suffisament régulière, donner une borne de l'erreur $|f'(0) - p'(0)|$.