Département de Mathématiques 2016/2017
Module: Analyse numérique 1
TD N°3 **Intégration numérique**

Exercice 1

On considère l'intégrale $I = \int_1^2 \ln(x)dx$.

1- En utilisant la méthode des trapèzes composite avec $n = 4$ sous-intervalles, évaluer I puis comparer le résultat obtenu avec la valeur exacte. Pourquoi la valeur numérique est-elle inférieure à la valeur exacte?

2- Quel nombre de points faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-2}?

Exercice 2

1- Combien faut-il de subdivisions de $[0.5, 1]$ pour évaluer $\int_{0.5}^1 \frac{1}{x}dx$ à 10^{-8}près en utilisant la méthode de Simpson.

2- Déterminer le degré de précision de la formule de quadrature $\frac{3h}{4}(3f(h) + f(3h))$ comme approximation de $\int_0^{3h} f(x)dx$.

Exercice 3

Soit une fonction $f(x)$ connue seulement pour les valeurs de x suivantes:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0	6	24	60

On désire évaluer $I = \int_0^4 f(x)dx$ par la quadrature de la forme: $\int_0^4 g(x)dx \simeq ag(1) + bg(3)$

(a) Déterminer les valeurs des constantes a et b de sorte que cette quadrature ait un degré de précision aussi élevé que possible.

Quel est le degré de précision de cette quadrature?

(b) Estimer la valeur de $I = \int_0^4 f(x)dx$ à l'aide de cette quadrature.

Exercice 4

On considère une fonction f de [-1,1] dans $\mathbb{R}$, 2 fois continument dérivable et deux points arbitraires x_1, x_2 de [-1,1] avec $x_1 \neq x_2$.

1- a) Donner l'expression du polynôme d'interpolation de f de degré1, aux points x_1, x_2 sous la forme de Lagrange.

b) Donner la formule d'erreur $f(x) - p_1(x)$

2-On prend $Q_1(f) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} p_1(x)dx$ pour approximation de $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)dx$

a) Montrer que $Q_1(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ en précisant A_1 et A_2.

b) Déduire de 1- une expression de $I(f) - Q_1(f)$.

c) Donner en fonction de $M = \sup_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$une majoration de $|I(f) - Q_1(f)|$

3- On définit une autre approximation de $I(f)$, soit $\tilde{Q}_1(f) = \tilde{A}_1 f(x_1) + \tilde{A}_2 f(x_2)$

En imposant: si $f = 1$ ou $f = x$ alors $I(f) = \tilde{Q}_1(f)$.En déduire les deux équations vérifiées par $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, x_1, x_2$.

Pour x_1, x_2 arbitraires fixés et différents, montrer que Q_1et $\tilde{Q}_1$ coincident.

4- a) Ecrire les deux autres équations vérifiées par $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, x_1, x_2$ si on impose de plus: $f = x^2$ ou $f = x^3$ alors $I(f) = \tilde{Q}_1(f)$

b) Si on prend $x_1 = -x_2$, trouver $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, x_1, x_2$ tels que $I(f) = \tilde{Q}_1(f)$ pour $f = 1, x, x^2, x^3$.

5- Soit $Q(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ vérifiant $Q(f) = I(f)$ pour $f = 1, x, x^2, x^3$ et soit $v(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

Montrer que $\int_{-1}^1 x^k v(x)dx = 0$ pour $k = 0, 1$.

En déduire que les $x_i, i = 1, 2$ sont uniquement déterminés.

Exercice 5

Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ et $I_n = \int_0^n e^{-x^2}dx$. On a alors $I_n = I_{n-1} + \int_{n-1}^n e^{-x^2}dx$.
Une table de valeurs donne $I_2 = 0.88208139076242$.

a) Considerons la formule d'intégration suivante :

$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(0) + \beta f(\frac{1}{3}) + \gamma f(\frac{2}{3}) + \delta f(1)$

Trouvez $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que cette formule soit exacte sur l'espace vectoriel des polynômes de degré le plus élevé possible. Par un changement de variables, donnez la formule sur l'intervalle quelconque $[a, b]$.

b) Calculez$\int_2^3 e^{-x^2}dx$ et $\int_3^4 e^{-x^2}dx$ par la formule précédente. En deduire I_3 et I_4.

c) On pose $f(\frac{1}{n}) = I_n$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = f(0) = I$.

Interpolez f par le polynôme P sur les données $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})), (\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})), (\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ et calculez $P(0)$.

Exercice 6

I-Soit [a,b] un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^2sur [a,b], pour tout $n \geq 1$ on considère la subdivision régulière $x_0, \ldots x_n$de [a,b] définie par

$x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, \qquad 0 \leq k \leq n$. Pour tout entier k entre 0 et $n-1$,on pose p_k le polynôme de Lagrange de f aux points x_k et x_{k+1}.

On définit une méthode d'intégration sur [a,b] par $Q_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(t)dt$

1) Donner l'expression de p_k en fonction de $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$. En déduire la formule de $Q_n(f)$.

2) De quelle méthode classique s'agit-il? Rappeler (sans démonstration) son degré de précision.

3) Montrer que $\sup\limits_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} |f(t) - p_k(t)| \leq \dfrac{(b-a)^2}{8n^2} \sup\limits_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} |f''(t)|$

4) En déduire la formule de l'erreur $\left|\int_a^b f(t)dt - Q_n(t)\right| \leq \dfrac{(b-a)^3}{8n^2} \sup\limits_{a \leq t \leq b} |f''(t)|$

5) On veut obtenir une valeur approchée de $\arctan(\frac{1}{2}) = \int_0^1 \dfrac{2}{t^2+4}dt$ en appliquant, la méthode Q_n à l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$ où $f(t) = \dfrac{2}{t^2+4}$

a) Démontrer que $\sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |f''(t)| \leq \dfrac{1}{4}$

b) Comment choisir l'entier n pour avoir une précision de 10^{-2}?

c) faire le calcul explicite donnant une valeur approchée à 10^{-2} près de $\arctan(\frac{1}{2})$

II-Pour approcher l'intégrale $I(f) = \int_0^h g(x)dx$ on considère la méthode d'intégration

$$J(f) = h\left[af(0) + bf(\frac{2h}{3})\right], \text{ avec } h > 0 \text{ donné.}$$

Déterminer a et b pour que la méthode J soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible. Quel est ce degré?