Département de Mathématiques 2016/2017

Module: Analyse numérique 1

TD N°2 **Interpolation polynomiale**

Exercice 1

Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n, n+1$ points distincts. Soit $(l_i(x))_{i=0,n}$ les polynômes de Lagrange associés aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

1. Montrer que les polynômes $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ forment une base de $\mathcal{P}_n$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n).

2. Soit $p_n \in \mathcal{P}_n$ vérifiant: $p_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \ldots, n$. Ecrire p_n dans la base des $(l_i)_{i=0,n}$. Un tel p_n est-il unique?

3. Ecrire le polynôme d'interpolation p associé aux points $(0,2), (1,1), (2,2)$ et $(3,3)$.

Exercice 2

Trouver le polynôme de l'espace span$\{1+x^2, x^4\}$ qui interpole les points $(0,1)$ et $(1,3)$.

Exercice 3

1. Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(-1,1), (0,1), (1,2)$ et $(2,3)$.

2. Soit Q le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(-1,1), (0,1)$ et $(1,2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :
$Q(x) - P(x) = \lambda (x+1) x (x-1)$.

Exercice 4

Montrer que les polynômes $1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$ forment une base de P_n ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 5

On a $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, f(x_0) = 1, f(x_1) = 3, f(x_2) = 4$.Dans la base de Newton:

1. Ecrire le polynôme p_0 qui interpole f en x_0.
2. Ecrire le polynôme p_1 qui interpole f en x_0, x_1.
3. Ecrire le polynôme p_2 qui interpole f en x_0, x_1, x_2.

Exercice 6

Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton-Gregory progressif, $p_5(x)$ aux points d'appui donnés dans le tableau suivant puis interpoler la valeur de la fonction en $x = 13.5$.

x_i	9	10	11	12	13	14
y_i	5.0	5.4	6.0	6.8	7.5	8.7

Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}$ donné, soit p_n le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f en $x_0, x_1, ..., x_n$, on veut évaluer l'erreur en x, c'est à dire $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$. Si x est égal à l'un des t_i,l'erreur est nulle. Supposons maintenant que $x \neq x_i, \forall i = 0, \ldots, n$.

On définit alors le polynôme p par: $p(t) = p_n(t) + \prod_n(t) \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_n(x)}$,où $\prod_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$.

1. Montrer que p interpole f aux points $\{x_0, x_1, ..., x_n, x\}$. Quel est le degré de p?
2. En déduire $p(t) - p_n(t)$ en fonction de $f[x_0, x_1, ..., x_n, x]$.
3. En déduire le calcul de l'erreur $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

Exercice 8

Construire l'interpolation polynomiale de Lagrange de degré 1, notée p_1, d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-1,1]$, interpolée aux points $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$. Montrer que si f est de classe C^2 sur $[-1,1]$, alors on a: $|f(x) - p_1(x)| \leq \dfrac{M_2}{2}(1 - x^2) \leq \dfrac{M_2}{2}, x \in$

$[-1,1]$,où $M_2 = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité devient une égalité.

Exercice 9

a) Montrer que le polynôme d'interpolation de lagrange associé à une fonction paire et une famille de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ symétrique par rapport à l'origine est pair.

b) En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \cos x$ aux points $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

Exercice 10

Etant donné n+2 points distincts $x_i, i = 0, ..., n+1$et n+2 points $y_i, i = 0, ..., n+1$,on note q l'interpolation polynomiale de degré n associée à l'ensemble $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$ et r l'interpolation polynomiale de degré n associée à l'ensemble $(x_i, y_i), i = 1, ..., n+1$. On définit: $p(x) = \dfrac{(x-x_0)r(x) - (x-x_{n+1})q(x)}{x_{n+1} - x_0}$

Montrer que p est l'interpolation polynomiale de degré n+1 associée à l'ensemble $(x_i, y_i), i = 0, ..., n+1$.

Exercice 11

Soit $g(x) = \sin(\frac{x}{3}), x \in I = [0,1]$.Soit $Q_n(x)$ le polynôme interpolant la fonction $g(x)$ aux points équidistants dans I.

Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x) - Q_n(x)|$ sur l'intervalle I, en fonction du degré n du polynôme et étudier son comportement quand $n \to +\infty$.

Exercice 12

soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des points distincts d'un intervalle [a,b].

Démontrer que la différence divisée $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ est une fonction symétrique pour toute permutation σ de 1,2,...,n

ie $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, ..., x_n]$

indication: Montrer l'identité $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum\limits_{j=0}^{n} f(x_j) \prod\limits_{0\leq k\leq n; k\neq j} (x_j - x_k)^{-1}$

Exercice 13

On considère le tableau des différences divisées suivant:

x	y			
-1	4			
		-3		
0	1		b	
		21		37
1	22		123	
		a		c
2	289			

1) Calculer les quantités a et b

2) Donner, sous forme de Newton, le polynôme qui interpole les 4 données y_i aux 4 points x_i.

3) Donner la relation entre une difference divisée d'ordre k $f[x_0, \ldots, x_k]$ et une des dérivées de f.

Indication: on pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - P_k(x)$ où $P_k(x)$ est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \ldots, x_k$.

4) En supposant que le tableau correspond aux valeurs d'une fonction polynôme de degré 3, calculer la quantité c.

Exercice 14

Soit n un entier strictement positif. Etant donnés n+1 points distincts $x_i, i = 0, ..., n$ et n+1 points $y_i, i = 0, ..., n$, on note π_j, $j \in \{0, ..., n\}$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré j associée aux points $(x_i, y_i), i = 0, ..., j$.

1−On pose: $\pi_n(x) = \pi_{n-1}(x) + q_n(x)$

Montrer que $q_n(x) = a_n \omega_n(x)$,où a_n est un coefficient à expliciter et $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$. La constante $a_n$est appelée la nième différence divisée de Newton et sera notée $y[x_0, ..., x_n]$dans la suite de l'exercice.

2−On pose: $y[x_0] = y_0$et $\omega_0 = 1$.Montrer que

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k(x) y[x_0, ..., x_k]$$

où $y[x_0, ..., x_k]$ est la kième différence divisée .

3− Montrer que: $\pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y_i$

et en déduire que $y[x_0, ..., x_n] = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{y_i}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

4−Obtenir enfin la formule de récurrence permettant le calcul des différences divisées:

$$y[x_0, ..., x_n] = \frac{y[x_1, ..., x_n] - y[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Pouvez-vous en déduire un avantage de la forme de Newton du polynôme d'interpolation sur la forme de Lagrange?

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Ecrire l'interpolation polynomiale de Lagrange de degré 1 de la fonction $f : x \to x^3$, interpolée aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = a$. Montrer l'existence d'un point $c \in [0, a]$ tel que: $f(x) - p_1(x) = \dfrac{f"(c)}{2} x(x - a)$,et établir que $c = \dfrac{1}{3}(x + a)$.Considérer ensuite la fonction $f : x \to (2x - a)^4$ et montrer que, dans ce cas, il y a deux valeurs possibles pour c. les déterminer.

Exercice 2

Soit $p_2(x)$ le polynôme de degré ≤ 2 qui interpole la fonction f aux points $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2)$.

Montrer que, si $f \in C\,^3([x_0, x_2])$ alors $\forall x \in [x_0, x_2]$ $\quad |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} M$,
où M est une constante à déterminer.

Exercice 3

Déterminer le pas régulier h d'une table de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 1]$ de façon à ce que l'interpolation par un polynôme du second degré dans cette table ait une erreur inférieure à 10^{-5}.

Exercice 4

Soient $f(x) = \cos x$ et $g(x) = e^{3x}$ définies sur $[0, 1]$. Estimer le nombre minimum de points pour que l'erreur entre la fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieure à $0.1, 0.01$ et 0.001.

Exercice 5

Soit la fonction définie par $f(x) = \ln(\frac{x}{4})$. On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange aux noeuds $x = 1, 2, 3, 4$.
1. Calculer $\max_{x\in[1,4]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.
2. En déduire une majoration de l'erreur d'interpolation en $\frac{5}{2}$.

Exercice 6

1. Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide de l'interpolation de Lagrange, si on prend les points $x_0 = 110, x_1 = 120, x_2 = 130$?
2. Soit une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que pour tout $x \in [-1, 1]\,, |f''(x)| \leq M$ et soit $p_1(x)$ le polynôme d'interpolation de f aux noeuds $\{x_0, x_1\}$.

Parmi les noeuds donnés ci-dessous, lequel choisiriez-vous pour une interpolation à deux points de f? Justifier.

a. $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$ b. $\{x_0, x_1\} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Exercice 7

Soient deux fonctions définies par:
$f(x) = \sqrt{x-1}$ *et* $g(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$
et trois points $x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.
1) Montrer,sans le calculer que f et g ont le même polynôme d'interpolation aux points x_0, x_1et x_2.
2) Calculer,en utilisant une interpolation linéaire, la valeur approchée de $f(1.75)$.
3)a) Calculer le polynôme $P_2(x)$ de Newton qui passe par les points donnés.
b) Trouver la valeur approchée de g au point $x = 1.75$ et donner une majoration de l'erreur d'interpolation.

Exercice 8

On considère la table suivante:

x	$f(x)$
2.8	16.4446
3.0	20.0855
3.2	24.5325
3.4	29.9641
3.6	36.5982
3.8	44.7012
4.0	54.5982

1) Calculer $f(3.3)$ par interpolation polynomiale à partir des données 3,3.2,3.4,3.6, en écrivant le polynôme sous la forme de Newton utilisant les différences progressives.
2) Donner une majoration de l'erreur théorique d'interpolation sachant que $f(x) = e^x$. Comparer à l'erreur réelle.
3) Combien de points aurait-il fallu prendre, en théorie, pour avoir une erreur inférieure à 5.10^{-5}? On admettra que:

$$\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leq h^{n+1}(n+1)! \text{ où } x_i = x_0 + ih \text{ et } x_0 \leq x \leq x_n.$$