Université Abou Bekr Belkaid 2016/2017
Département de Mathématiques
Module: Analyse numérique 1
Feuille de TD 1 **Notions d'erreurs**

Exercice 1

On considère l'expression:
$x = ((((((0.1\times10^0+0.1\times10^{-3})+0.4\times10^{-3})+0.2\times10^{-3})+0.1\times10^{-3})+0.2\times10^{-3})+0.1\times10^{-3})$
1. Calculer la valeur de x en arithmétique exacte, puis en arithmétique flottante à 3 chiffres avec arrondi, en respectant l'ordre préscrit par les parenthèses. Expliquer la différence entre les résultats. Déterminer l'erreur relative.
2. Proposer une modification de l'ordre de sommation qui permette d'obtenir une réponse plus précise en arithmétique flottante à 3 chiffres. Justifier votre réponse en calculant de nouveau l'erreur relative.

Exercice 2

En utilisant le polynôme de Taylor de degré 9 de la fonction $f(x) = e^x$ et une arithmétique flottante à 3 chiffres sans arrondi. Calculer e^{-5}, avec les formules suivantes:

$a) \qquad e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} \qquad\qquad b) \qquad e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$

$c)$ En prenant $e^{-5} = 6.74 \times 10^{-3}$, quelle formule de $a)$ ou de $b)$ donne la meilleure précision et pourquoi?

Exercice 3

Soit $f \in C\,[a,b]$ une fonction dérivable sur (a,b). Supposons que pour évaluer $f(x_0)$,on calcule $\tilde{f}(x_0) = f(x_0+\epsilon)$ où $x_0 \in (a,b)$.
Utiliser le théorème des accroissements finis pour estimer l'erreur absolue $\left|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)\right|$ et l'erreur relative $\left|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)\right| / |f(x_0)|$ en supposant que $f(x_0) \neq 0$.
En prenant $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$et $x_0 = 1$. Trouver des bornes de l'erreur absolue et l'erreur relative pour:

$i) \qquad f(x) = \ln x, \qquad ii) \qquad f(x) = \cos x.$

Exercice 4

L'évaluation de l'expression $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} - (e^x - e^{-x})$ peut causer une élimination des chiffres significatifs.
1. Donner la liste de toutes les opérations risquées.
2. Pour chacune de ces opérations proposer une autre façon de l'évaluer.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

Exercice supplémentaire

Calculer les racines de l'équation $x^2 + 111.11x + 1.2121 = 0$ dans une arithmétique flottante à 5 chiffres en utilisant les formules $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ puis $x = \dfrac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ et analyser les résultats.

Exercice supplémentaire

Pour les expressions suivantes, identifier la source potentielle d'erreur puis proposer une autre façon de l'évaluer.

1. $\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x}$
2. $1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \cdots \dfrac{1}{10000^4}$
3. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

Exercice 5

Soit $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Utiliser une arithmétique flottante à 4 chiffres avec arrondi pour évaluer $f(0.1)$.
3. Remplacer chaque fonction trigonométrique par son polynôme de Maclaurin de degré 3, puis répéter la question2.
4. Trouver les erreurs relatives pour les valeurs obtenues en 2. et 3. sachant que $f(0.1) = -1.99899998$.

Exercice 6

La fonction d'erreur de Gauss est définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

La fonction erf intervient régulièrement dans le domaine des probabilités et statistiques.
On désire approcher la valeur $\operatorname{erf}(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ avec une erreur toujours inférieure à 10^{-10}.

1. Donner la valeur exacte de $\operatorname{erf}(0)$.
2. Utiliser un développement de Taylor de e^u pour déterminer les n premiers termes non nuls du développement de Taylor de e^{-t^2}.
3. En déduire les n premiers termes non nuls du développement de Taylor de $\operatorname{erf}(x)$.
4. Préciser de manière analytique le reste du developpement de Taylor.
5. Donner la valeur minimale de n pour que l'erreur de l'approximation de la fonction erf soit toujours inférieure à 10^{-10} pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice supplémentaire

Soit $f(x) = \ln x$ et $x_0 = 1$. Soit le polynôme de Taylor $p_n(x)$ de degré n de la fonction $f(x)$ au voisinage de x_0.

1. Trouver le polynôme de Taylor $p_2(x)$.
2. Utiliser $p_2(x)$ pour approcher $\ln(1.1)$. Puis trouver une borne de l'erreur de cette approximation.
3. Quelle est la valeur de n nécessaire pour approcher $f(x)$ à 10^{-4} près sur $[1, 2]$?