Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen, Faculté des Sciences
Département des Mathématiques
MI Deuxième Année (Maths L2),2016 - 2017

ALGÈBRE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 4

Réduction des Endomorphisme Suite

15 Février 2017

Exercice 15. Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer α et β pour que la matrice $\mathcal{A}$ soit diagonalisable.

Exercice 16. Montrer qu'il existe une matrice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $m_{\mathcal{A}}(X) = X^2 + 1$ comme polynôme minimal si et seulement si n est pair.

Exercice 17. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Montrer que les deux polynômes $m_f(X)$ et $P(X)$ sont premiers entre eux si et seulement si $P(f)$ est inversible.

Exercice 18. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à chaque polynôme $P(X)$ on associe le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X) = X^2 - 32X + 7$.

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer $m_f(X)$ et le spectre de f

Exercice 19. Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les sous espaces caractéristiques de $\mathcal{A}$ et calculer $\mathcal{A}^n$.

Exercice 20. Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

En discutant selon les valeurs de α , donner une forme réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage.

Exercice 21. Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Metre sous forme de Jordan $\mathcal{A}$ et calculer $\mathcal{A}^n$.

Exercice 22. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et $\mathbf{a}$ un élément non nul de $\mathbb{K}$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ tel que

$$f^3 - 3\mathbf{a}f^2 + \mathbf{a}^2 f = 0.$$

1. Montrer que
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2 - 3\mathbf{a}f + \mathbf{a}^2\mathrm{Id}).$$
2. Montrer que
$$\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 - 3\mathbf{a}f + \mathbf{a}^2\mathrm{Id}).$$

Exercice 23. On considère $\mathbb{C}^n$ comme $\mathbb{C}$ - espace vectoriel, $\{ e_1, \cdots, e_n \}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et f un endomorphimse de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$\begin{cases} f(e_i) = e_{i+1}, & \forall\, i = 1, \cdots, n-1, \\ \\ f(e_n) = e_1. \end{cases}$$

1. Calculer $f^n(e_i)$ pour $i = 1, \cdots, n$et en déduire que f est diagonalisable.
2. Monter que la famille suivante est libre
$$\left\{ \mathrm{Id}, f, f^2, \cdots, f^{n-2}, f^{n-1} \right\}.$$
3. Déterminer $m_f(X)$.

Exercice 24. Soit la matrice suivante

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le terme général de la suite vectorielle définie par
$$X_n = \mathcal{A}\, X_{n-1}, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$
2. En utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système
$$\frac{d}{dt} X = \mathcal{A}\, X.$$

Exercice 25. On suppose que

$$P_{\mathcal{A}}(X) = (-1)^\alpha (X-\lambda)^\alpha, \quad m_{\mathcal{A}}(X) = (X-\lambda)^\beta, \quad \dim \mathbb{E}_\lambda = \gamma.$$

Montrer que

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \gamma \leq 1 + \alpha - \beta.$$

Exercice 26. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$. On suppose que

$$P_{\mathcal{A}}(X) = (X-1)^4 (X-2)^2, \quad m_{\mathcal{A}}(X) = (X-1)^2 (X-2).$$

Que peut on dire de la dimension des sous espaces propres, quelles sont les formes de Jordan possible.