Université de Tlemcen.   le 03/01/2017.
Département de mathématiques.

Série n° 3 : Réduction des endomorphismes

Exercice n° 1

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f'. Déterminer les valeurs propres de D.

Exercice n° 2

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. et I l'endomorphisme de E qui à f associe sa primitive qui s'annulle en 0. Déterminer les valeurs propres de I.

Exercice n° 3

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E, montrer que : $0 \notin S_p(f) \iff f$ surjective.

Exercice n° 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}(X)$ défini par $f(P(X)) = (X-1)P(X)$.
Montrer que f n'a pas de valeurs propres.

Exercice n° 5

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. $(E \neq \{0\})$, f un endomorphisme nilpotent de E $(\exists n \in \mathbb{N} / f^n = 0)$. Déterminer les valeurs propres de f et leurs sous espaces propres associés.

Exercice n° 6

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. et f l'endomorphisme de E défini par $f(P(X)) = (2X+1)P'(X) - (X^2-1)P''(X)$.

1°/ Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2°/ Calculer $f^n(a_0 + a_1X + a_2X^2)$.

Exercice n° 7

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} = M(f)_{e_i} \text{ où } \{e_i\} \text{ est une base quelconque de } E$$

A est elle diagonalisable ?

Exercice n° 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1°/ Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$; 2°/ Résoudre le système $\frac{dX}{dt} = A.X$.

Exercice n° 9

Soit $A_t = \begin{pmatrix} t & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°/ Sans calculer $P_{A_t}(\lambda)$, montrer que $(t-1)$ est une valeur propre de A_t et déterminer E_{t-1}.

2°/ Que peut on dire de la multiplicité de $(t-1)$, en déduire le spectre de A_t

3°/ A_t est elle diagonalisable ?

Exercice n° 10

1°/ Trigonaliser les matrices suivantes en précisant les matrices de passage.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

2°/ Résoudre $\frac{dX}{dt} = B.X$.

Exercice n° 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$.

1°/ Montrer que $A^3 - aA^2 + 2A - I = 0$

2°/ Montrer que A est inversible et déduire de ① A^{-1}.

3°/ Calculer $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I$.

Exercice n° 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = A.M$

Montrer que si $A^2 = A$ alors f est diagonalisable.

Exercice n° 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; pour quelles valeurs de a, b, c A est elle diagonalisable ?

Exercice n° 14

1°/ Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 - 3A + 2I = 0$

2°/ Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 8A^2 + 21A - 18I = 0$.