Université de Tlemcen
Département de mathématiques
Algèbre 3

A.U. 2016/2017
le 31/10/2016.

Fiche de TD n° 1 : DETERMINANTS

Exercice n° 1

1°/ Montrer sans le calculer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

2°/ Montrer sans le calculer que le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

Exercice n° 2

1°/ Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

2°/ Déterminer x pour que les vecteurs
$u_1 = (x, a, b, x)$; $u_2 = (a, x, x, b)$; $u_3 = (b, x, x, a)$; $u_4 = (x, b, a, x)$.
forment une base de $\mathbb{C}^4$

Exercice n° 3

Calculer les déterminants suivants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} ; \; a, b, c, d \in$$

Exercice n° 4 :

Soient P, Q, R 3 polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$, montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} P(0) & P(1) & P(2) \\ Q(0) & Q(1) & Q(2) \\ R(0) & R(1) & R(2) \end{vmatrix} = 0$$

Exercice n° 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer $\det A$.

Exercice n° 6

Montrer que pour $n > 2$

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & & a_2 - b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0 \quad a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n.$$

Exercice n° 7

Soit $D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{k} & \overbrace{}^{n-k} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array}$ $\quad A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$; $C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$.

1/ Montrer que $\det D = \det A . \det C$.

2/ En déduire que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) = \det(A+B)\det(A-$

Exercice n° 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 9

1/ Soient $x, a_0, \dots, a_n$ des éléments et D_n le déterminant d'ordre $(n+1)$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & x & & \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \\ \vdots & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \text{ ; calculer } D_n.$$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels distincts, calculer pour tout x réel le déterminant d'ordre $(n+1)$ suivant.

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & a & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & x & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & & a_n & 1 \end{vmatrix}$$